Alte Weltbilder & Newton’sche Mechanik

Weltmodelle und physikalische Werkzeuge I
Kosmologie für Nicht-Physiker

Markus Pössel & Björn Malte Schäfer

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

16.10.2014 bis 22.1.2015

Weltmodelle und Werkzeuge

Kosmologie nützt Erkenntnisse aus einer Vielzahl von Bereichen der Astronomie und Physik:

- Klassische Mechanik
- Allgemeine Relativitätstheorie
- Thermodynamik/Statistik
- Fluiddynamik
- Teilchenphysik, Kernphysik
- Sterneigenschaften und -entwicklung
- Galaxieneigenschaften und -entwicklung
- kosmische Entfernungsleiter

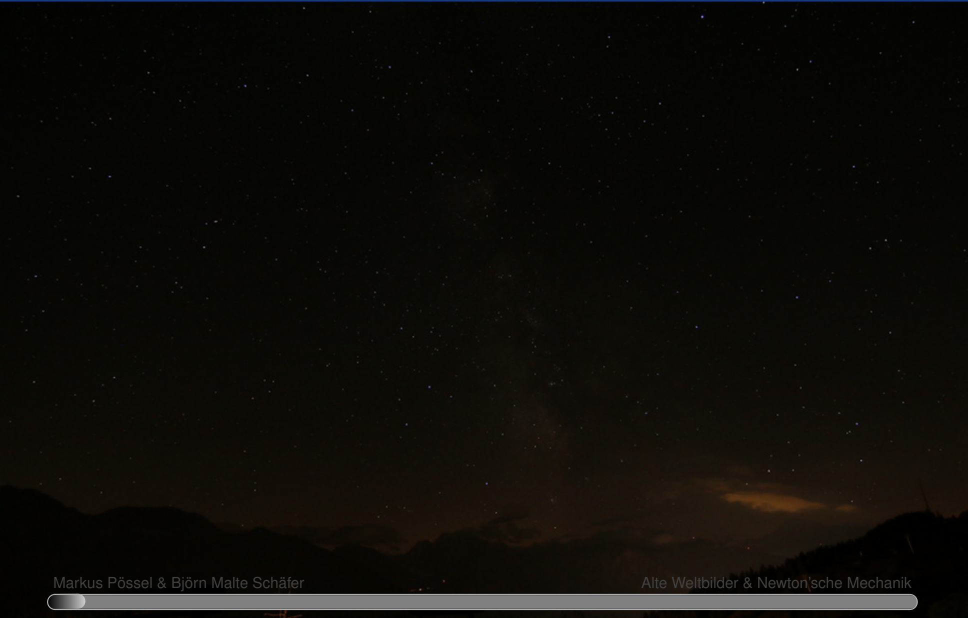
Weltmodelle und Werkzeuge

Vorgehen hier: Streifzug durch Weltmodelle und Werkzeuge, grob chronologisch geordnet.

Wir sammeln Konzepte/Werkzeuge/Naturgesetze/astronomische Erkenntnisse für die moderne Kosmologie!

Vorsicht: „Physikalische Historie“ vermittelt immer ein verzerrtes Bild der Geschichte (Sackgassen/Fehlschläge werden ausgeblendet; Konzepte von moderner Warte aus interpretiert)

Was wir vom Rest des Universums sehen



Was wir vom Rest des Universums sehen

Bild: John Colosimo (colosimophotography.com)/ESO

Himmelsbewegungen dokumentieren/vorhersagen

Erklärungen/Interpretationen

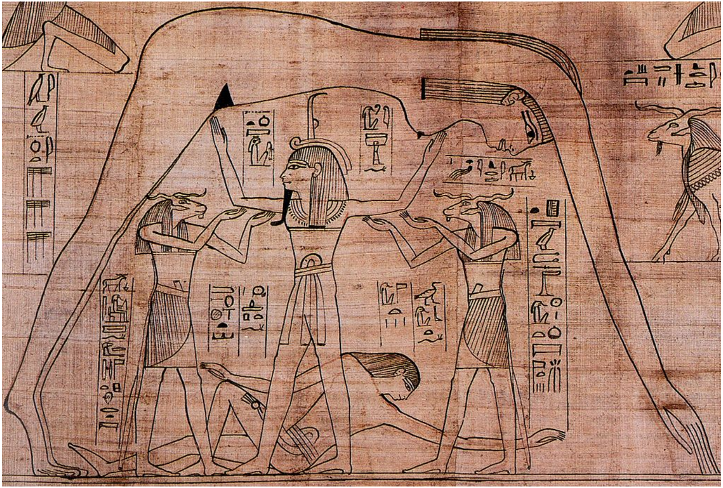
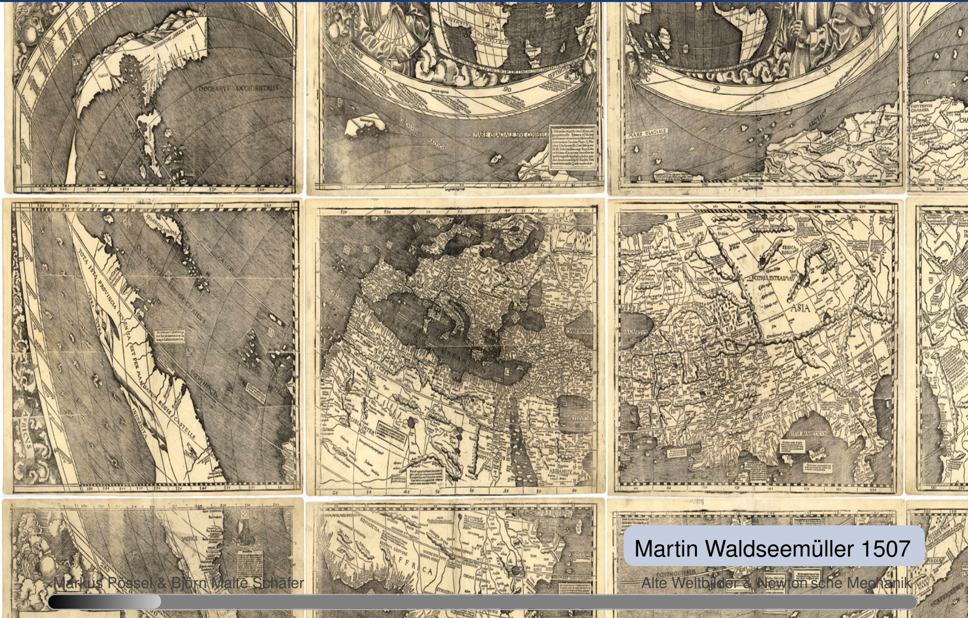


Bild: Greenfield Papyrus (BM) ca. 940 BC via Wikimedia Commons, Public Domain

Welt = Erde?



Martin Waldseemüller 1507

Änderung und Konstanz: Fixsterne

Bild: ESO/A. Santerne

Ptolemäisches Weltsystem

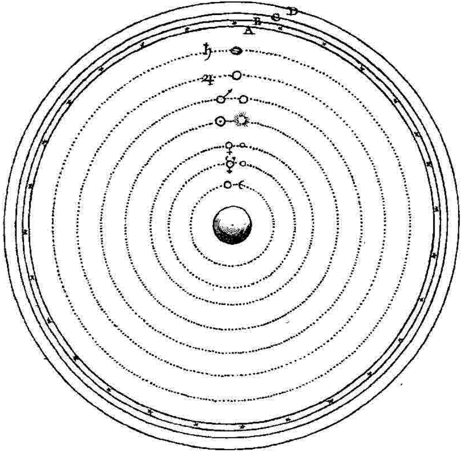
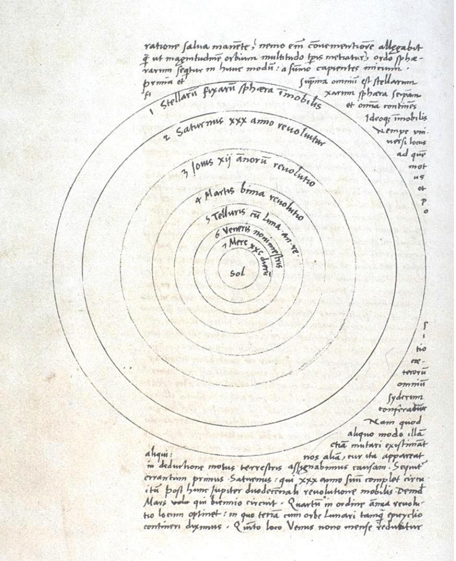


Abb. aus: Diderot/D’Alembert, *Encyclopédie*

Kopernikanisches Weltbild

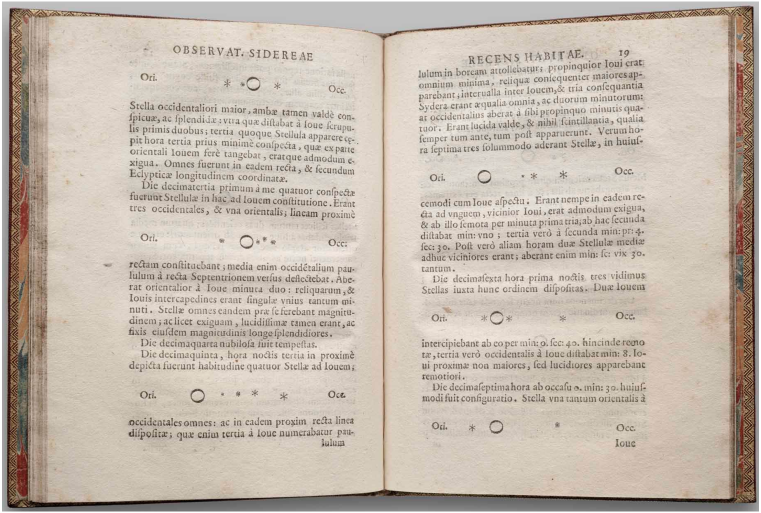


De revolutionibus orbium coelestium (1543)

Quantitative Vermessung: Positionsastronomie

Mauerquadrant von Tycho Brahe, wahrscheinlich aus *Astronomiae instauratae mechanica* (1598), später koloriert, Genauigkeit $< 1'$

Galileis Beobachtungen



OBSERVAT. SIDEREAE

Ori. Occ.

Stella occidentaliori maior, ambæ tamen valdè conſpicuæ, ac ſplendidæ: vtra quæ diſtabat à Ioue ſcrupulis primis duobus; tertia quoque Stellula apparere cepit hora tertia prius minimè conſpecta, quæ ex parte orientali Iouem ferè tangebat, eratque admodum exigua. Omnes fuerunt in eadem recta, & ſecundum Eclypticæ longitudinem coordinatæ.

Die decimatertia primum à me quatuor conſpectæ fuerunt Stellulæ in hac ad Iouem conſtitutione. Erant tres occidentales, & vna orientalis; lineam proximè

Ori. Occ.

rectam conſtituebant; media enim occidẽtalium paululum à recta Septentrionem verſus deflectebat. Aberat orientalior à Ioue minuta duo: reliquarum, & Iouis intercapedines erant ſingulæ vnius tantum minuti. Stellæ omnes eandem præ ſe ferebant magnitudinem; ac licet exiguam, lucidiſſimæ tamen erant, ac fixis eiuſdem magnitudinis longe ſplendidiores.

Die decimaquarta nubiloſa fuit tempeſtas.

Die decimaquinta, hora noctis tertia in proximè depicta fuerunt habitudine quatuor Stellæ ad Iouem;

Ori. Occ.

occidentales omnes: ac in eadem proxim recta linea diſpoſitæ; quæ enim tertia à Ioue numerabatur paululum

RECENS HABITAE. 19

lulum in boream attollebatur; propinquior Ioui erat omnium minima, reliquæ conſequenter maiores apparebant; interualla inter Iouem, & tria conſequantia Sydera erant æqualia omnia, ac duorum minutorum: at occidentalius aberat à ſibi propinquo minutis quatuor. Erant lucida valde, & nihil ſcintillantia, qualia ſemper tum ante, tum poſt apparuerunt. Verum hora ſeptima tres ſolummodo aderant Stellæ, in huiuſ-

Ori. Occ.

cemodi cum Ioue aſpectu. Erant nempe in eadem recta ad vnguem, vicinior Ioui, erat admodum exigua, & ab illo ſemota per minuta prima tria; ab hac ſecunda diſtabat min: vno; tertia verò à ſecunda min: pr: 4. ſec: 30. Poſt verò aliam horam duæ Stellulæ mediæ adhuc viciniores erant; aberant enim min: ſc: vix 30. tantum.

Die decimaſexta hora prima noctis tres vidimus Stellas iuxta hunc ordinem diſpoſitas. Duæ Iouem

Ori. Occ.

intercipiebant ab eo per min: 0. ſec: 40. hinc inde remotæ, tertia verò occidentalis à Ioue diſtabat min: 8. Ioui proximæ non maiores, ſed lucidiores apparebant remotiori.

Die decimaſeptima hora ab occaſu 0. min: 30. huiuſmodi fuit configuratio. Stella vna tantum orientalis à

Ori. Occ.

Ioue

Sidereus Nuncius (1610)

Kopernikanisches Weltsystem II

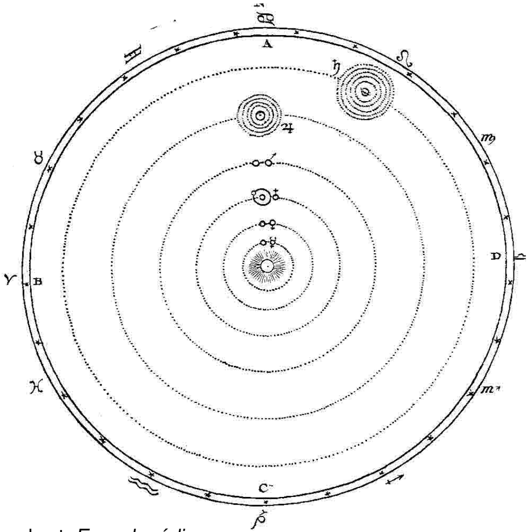
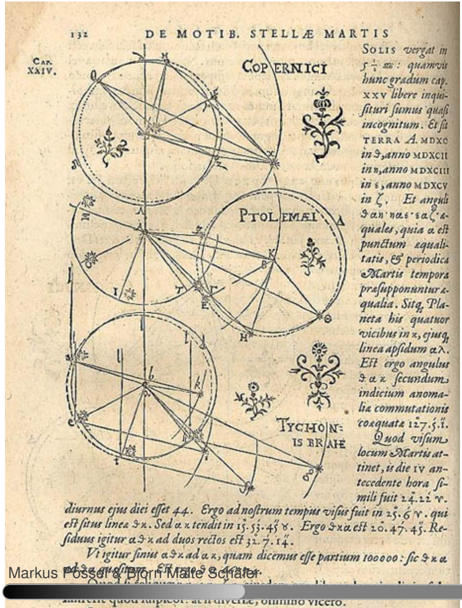


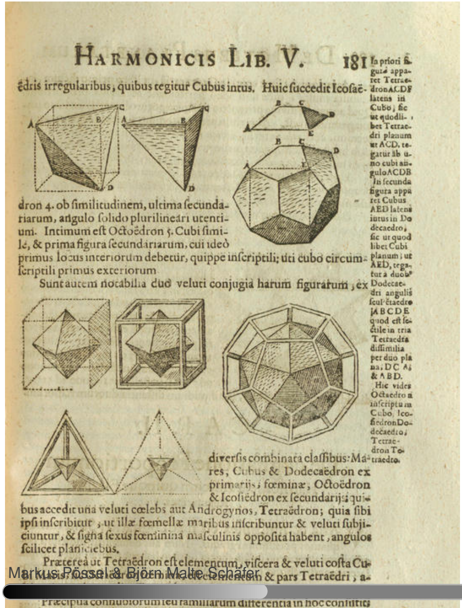
Abb. aus: Diderot/D’Alembert, *Encyclopédie*

Quantitatives Modell: Kepler



Erste zwei Kepler'sche Gesetze in *Astronomia Nova* (Heidelberg 1609); drittes Gesetz *Harmonice Mundi* 1619

Kepler und die Größen von Umlaufbahnen



HARMONICIS LIB. V. 181

ëdris irregularibus, quibus tegitur Cubus intus. Huic succedit Icosaë-dron 4. ob similitudinem, ultima secundariarum, angulo solido plurilineari utentium. Intimum est Octoëdron 5. Cubi simile, & prima figura secundariarum, cui ideò primus locus interiorum debetur, quippe inscriptili; uti cubo circumscriptili primus exteriorum.

Sunt autem notabilia duo veluti conjugia harum figurarum, ex diversis combinata classibus: Mares, Cubus & Dodecaëdron ex primariis; fœminæ, Octoëdron & Icosiëdron ex secundariis; quibus accedit una veluti cœlebs aut Androgynos, Tetraëdron; quia sibi ipsi inscribitur, ut illæ fœmellæ maribus inscribuntur & veluti subjiciuntur, & signa sexus fœminina masculinis opposita habent, angulos scilicet planiciebus.

Præterea ut Tetraëdron est elementum, viscera & veluti costa Cu-
... & pars Tetraëdri, a-
Præcipua connubiorum seu familiarum differentia in hoc consistit

In priori figura apparet Tetraëdron ACDF latens in Cubo; sic ut quodlibet Tetraëdri planum ut ACD, tegatur ab uno cubi angulo ACDB. In secunda figura apparet Cubus AED latens intus in Dodecaedro, sic ut quodlibet Cubi planum ut AED, tegatur a duobus Dodecaëdri angulis seu tectis ABCDE quod est sectile in tria Tetraedra dissimilia per duo plana, DCA & ABD. Hic vides Octaedron inscriptum Cubo, Icosiedron Dodecaedro, Tetraedron Tetraedro.

Ineinandergeschachtelte Vielflächner in Keplers *Harmonice Mundi* („Welt(en)harmonie“) 1619, Buch V.

Frühe Weltbilder: Ähnlichkeiten und Kontraste

Kontrast zu Legenden: Sparsamkeit der Erklärungen; Überprüfbarkeit der Komponenten

Partieller Übergang von der Himmelskugel zum dreidimensionalen Raum — Auftakt zu räumlicher (später raumzeitlicher) Beschreibung

Kopernikus: Erde verliert ihre besondere Stellung! Einer unter mehreren Planeten. In diese Richtung wird es noch sehr viel weiter gehen!

Trend zu quantitativer Beschreibung – Übergang von einfacher Geometrie zu Planetenbahnen mit mehr Parametern

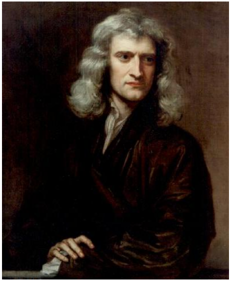
Ende Vorlesung 23.10.2014

Die Newton'sche Revolution

Mechanischer Rahmen, Gravitation als Kraft: Allgemeine Bewegungsgesetze

Irdisches und Himmlisches sind nicht getrennt: Apfel $\sim$ Mond

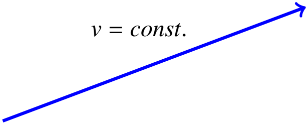
Neues Modell für die Differenzialgleichungen (= Naturgesetze bestimmen Änderungsraten) plus Anfangsbedingungen



Isaac Newton (1642-1727)
by Sir Godfrey Kneller via
Wikimedia Commons

Newton’sche Mechanik

Natürlicher (=freier) Bewegungszustand: Geradlinige, gleichförmige Bewegung (Obacht: in geeignetem Bezugssystem)



Abweichungen von der freien Bewegung entsteht durch Einfluss von Kräften,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

mit $\vec{a}$ der Beschleunigung (also Änderung des Geschwindigkeitsbetrags ebenso wie der Richtung der Geschwindigkeit).

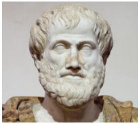
Newton’sche Mechanik

Teil der Mechanik: Explizite Modelle für verschiedene Arten von Kraft (Gravitation, Elektrodynamik, Reibungskräfte) – wie üben Körper etc. aufeinander Einflüsse aus?

Geeignete Wahl des Bezugssystems (Inertialsystem) beinhaltet: Unterscheidung von „richtigen Kräften“ und Trägheitskräften (d.h. solchen, die sich alleine durch die Wahl des Bezugssystems zum Verschwinden bringen lassen: Zentrifugalkraft, Corioliskraft, Eulerkraft)

Newton vs. Aristoteles

vs.



(Irdische) Gegenstände in Bewegung: bei Newton natürliche Bewegung für $v = const.$ und geradlinig. Aristoteles: Antrieb nötig

(Irdische) Gegenstände, die langsamer werden und anhalten: bei Aristoteles natürliche Bewegung, bei Newton Reibungskräfte

Bei Aristoteles: Unvergängliche, himmlische Vorgänge haben eigene Eigenschaften. Bei Newton: In beiden Fällen natürliche Bewegung plus Kräfte.

Newton'sche Gravitation

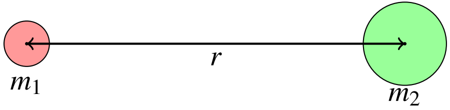
Newtons Gesetz für die Schwerkraft (Gravitation): Zwei Punktmassen m_1, m_2 im Abstand r voneinander ziehen sich mit einer Kraft der Stärke

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

an.

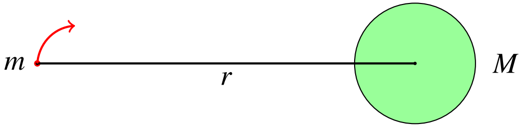
G ist die Newtonsche Gravitationskonstante,

$$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2).$$



Newton’sche Gravitation

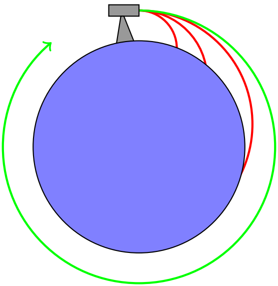
Häufige Situation: $m = m_2 = M \gg m_1$; die Punktmasse m ist ein „Testteilchen“, mit dessen Hilfe man das *Gravitationsfeld* ($\sim$ Einfluss auf alle denkbaren Testteilchen) eines größeren Körpers der Masse M kartiert.



Beispiel: Gravitationsbewegung/-statik im Schwerefeld der Erde (irdische Körper) oder im Schwerefeld der Sonne (Planeten, Kometen).

Newton'sche Gravitation

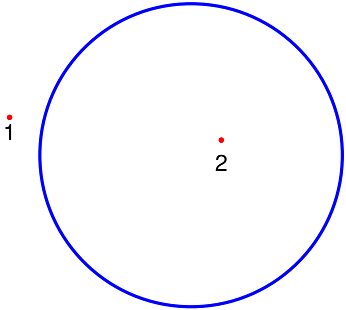
Vereinigung irdisches und himmlisches: Kanonenkugelexperiment



Bei Vernachlässigung von Reibung: Fallkurven (Kanonenkugel) und Umlaufbahn gehen direkt ineinander über!

Newton'sche Gravitation

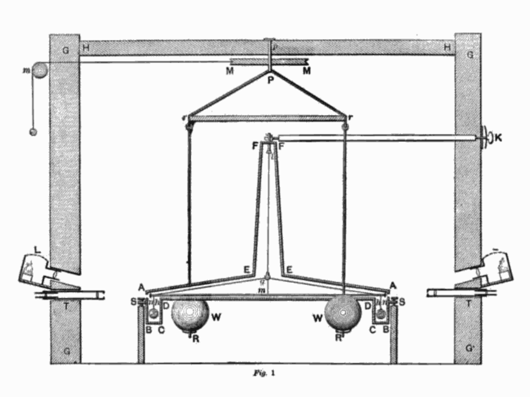
Allgemeine Rechnung zur Gravitationskraft einer Kugelschale (Beiträge aufsummieren):



Kraft der hohlkugelförmigen Masseverteilung (blau) auf Testteilchen innerhalb (z.B. 2): Null! ... auf Testteilchen außerhalb: als sei die Gesamtmasse im Zentrum der Kugel konzentriert.

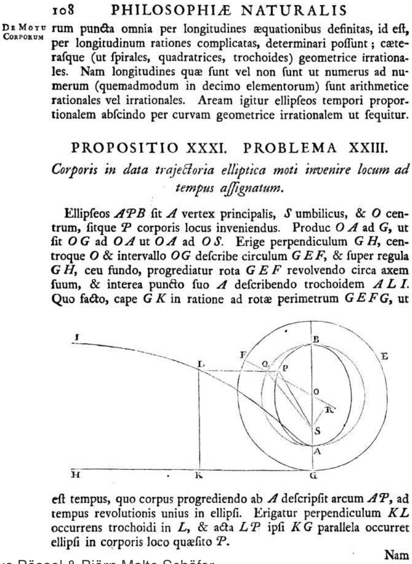
Newton’sche Gravitation

Die Erde wiegen: Cavendish-Experiment



Aus H. Cavendish (1798, „Experiments to determine the Density of the Earth“): Bestimmung von G und damit der Erdmasse

Newton’sche Gravitation und Kepler



108 PHILOSOPHIÆ NATURALIS

DE MOTU CORPORUM

rum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id eſt, per longitudinum rationes complicatas, determinari poſſunt; cæteraſque (ut ſpirales, quadratrices, trochoides) geometrice irrationales. Nam longitudines quæ ſunt vel non ſunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo elementorum) ſunt arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur ellipſeos tempori proportionalem abſcindo per curvam geometrice irrationalem ut ſequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data trajectoria elliptica moti invenire locum ad tempus aſſignatum.

Ellipſeos *APB* ſit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, ſitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *OA* ad *G*, ut ſit *OG* ad *OA* ut *OA* ad *OS*. Erige perpendiculum *GH*, centroque *O* & intervallo *OG* deſcribe circulum *GEF*, & ſuper regula *GH*, ceu fundo, progrediatur rota *GEF* revolvendo circa axem ſuum, & interea puncto ſuo *A* deſcribendo trochoidem *ALI*. Quo facto, cape *GK* in ratione ad rotæ perimetrum *GEFG*, ut

eſt tempus, quo corpus progrediendo ab *A* deſcripſit arcum *AP*, ad tempus revolutionis unius in ellipſi. Erigatur perpendiculum *KL* occurrens trochoidi in *L*, & acta *LP* ipſi *KG* parallela occurret ellipſi in corporis loco quæſito *P*.

Nam

Newton (*Principia*, 1687) kann die Kepler’schen Gesetze ableiten – und im 3. Gesetz die Konstante bestimmen:

$$T^2 = r^3\,\frac{4\pi^2}{GM}.$$

(Daraus auch Sonnenmasse!)

Newton’sche Gravitation

Bild: NASA/W. Liller

Neu bei Newton: Auch offene Bahnen (ebenfalls Kegelschnitte: Hyperbel und Parabel)

Dadurch Bahnbestimmung von Kometen möglich: Halley’scher Komet, benannt nach Halleys Vorhersage für 1758

Newton'sche Gravitation

Erstmals bei Newton: Möglichkeit, Störungsgrechnung durchzuführen (Gauß 1800).

$$\vec{F}_{gesamt} = \vec{F}_{Sonne} + \vec{F}_{Jupiter} + \vec{F}_{Saturn} + \ldots$$

Allgemeines Verfahren: Finde eine Lösung, die nur den größten Beitrag berücksichtigt. Füge zu dieser Lösung Korrekturen hinzu, die der Reihe nach die weniger großen Kraftbeiträge berücksichtigen.

Großer Erfolg: Urbain Le Verrier (John Couch Adams) sagen 1846 Planet Neptun vorher, Entdeckung durch Johann Gottfried Galle binnen eines Monats.

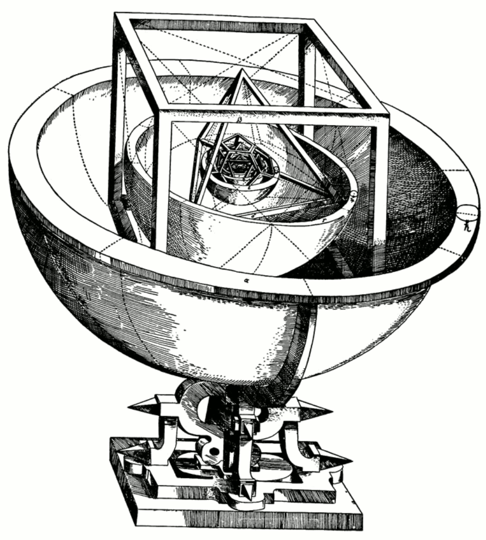
Newton’sche Gravitation

Mathematische Struktur: Differentialgleichung. Physikalisch gegeben ist die zweite Ableitung, Änderungsrate der Änderungsrate

Anfangsbedingungen: Anfangsort, Anfangsgeschwindigkeit – der Rest ist durch die physikalischen Gesetze festgelegt.

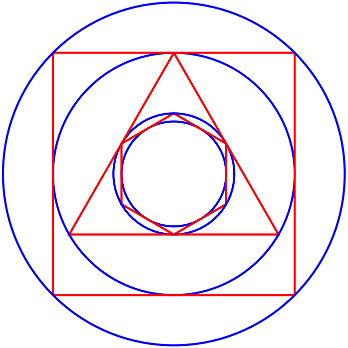
Ganz allgemeines Muster in der Physik!

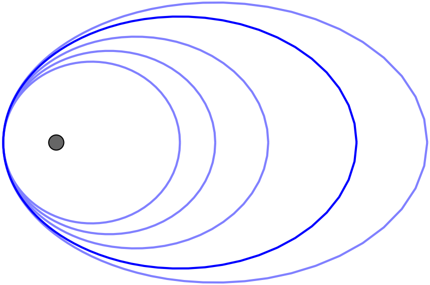
Anfangsbedingungen Kepler vs. Newton



Reprise:
Ineinandergeschachtelte Vielflächner, hier in Keplers *Mysterium Cosmographicum* (1596)

Anfangsbedingungen: Kepler vs. Newton

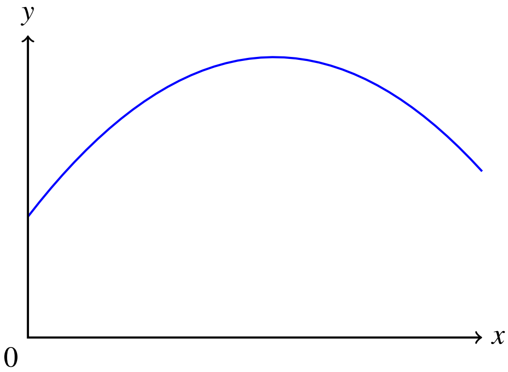




Anfangsbedingungen: Spielzeugmodell

Kurve $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Kurve).

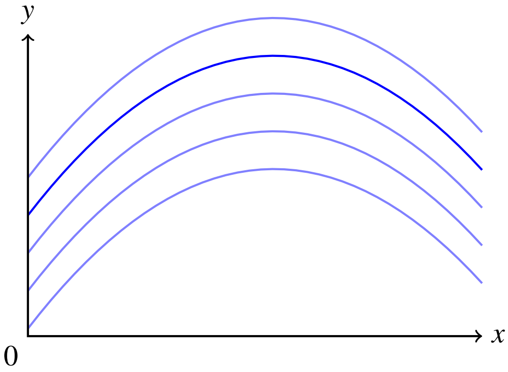
Restriktivste Möglichkeit: Ganze Kurve fest vorgegeben (a, b, c vorgegeben):



Anfangsbedingungen: Spielzeugmodell

Kurve $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Kurve).

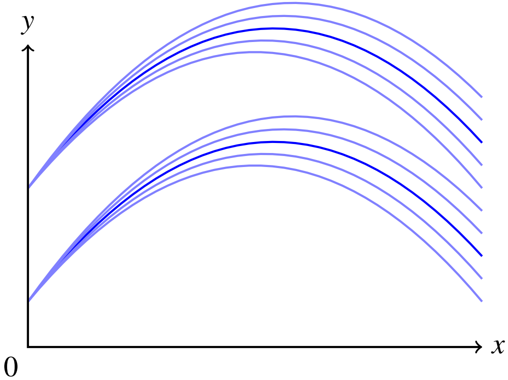
Alle Änderungsraten vorgeben (a, b fest):



Anfangsbedingungen: Spielzeugmodell

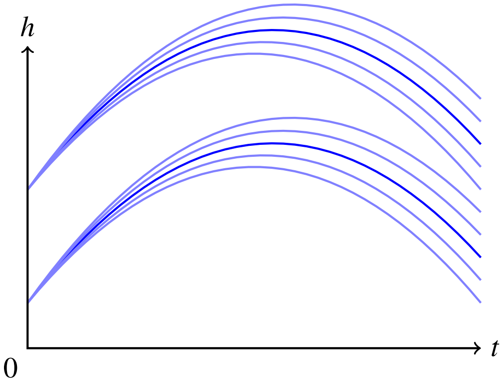
Kurve $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Kurve).

Nur zweite Ableitung vorgegeben (a fest):



Anfangsbedingungen: Natur manipulieren

Kurve $h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 x + h_0$ für den freien Fall nahe der Erdoberfläche (mit $g = 9,81\ m/s^2$:



Anfangsbedingungen und Naturgesetze

Erst die Freiheit, Anfangsbedingungen zu setzen, macht die Naturgesetze zu allgemein anwendbaren Gesetzen, die (viele!) Spezialfälle beschreiben!

Differenzialgleichungen zweiter Ordnung (Beschleunigungen vorgegeben) sind in der Physik die Norm.

Physik von Feldern (Gravitationsfeld etc.): außer den Zeitableitungen spielen auch räumliche Ableitungen (wie ändert sich eine Eigenschaft von Ort zu Ort?) eine Rolle.

Kinematik vs. Dynamik

Sprachgebrauch in der Physik:

Kinematik: Alles, was nur allgemeine Geschwindigkeiten (erste Ableitungen) betrifft. (Beispiel: Kräftefreie Bewegung)

Dynamik: Kräfte und durch sie bewirkte Gleichungen für die Beschleunigung. (Physiker-Version der Begründungen, *warum* etwas passiert.)

Wie rekonstruiert man aus Änderungen Bahnen?

Gegeben: Beschleunigung $a(t, x, v)$, die das Teilchen erfährt.
Anfang bei x_0, Anfangsgeschwindigkeit v_0.

$$x(0 + \Delta t) = x_0 + \Delta t \cdot v_0$$

$$v(0 + \Delta t) = v_0 + \Delta t \cdot a(x, t).$$

Wie rekonstruiert man aus Änderungen Bahnen?

Analog dazu weiter in Zeitschritten Δt:

$$x(t+\Delta t) = x_0 + \Delta t \cdot v(t)$$

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta t \cdot a(x,t).$$

Wie rekonstruiert man aus Änderungen Bahnen?

Analytische Lösung: Geschlossener Ausdruck für die Lösung $x(t)$, z.B.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + v_0 \sin(\omega t)$$

für den harmonischen Oszillator mit $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

Funktioniert nur für einfache Fälle (z.B. hohe Symmetrie).

Numerische Lösung (Simulation): Am Computer mit endlich großen Zeitschritten verfolgen, was passiert.

Funktioniert auch für allgemeinere Fälle; Problem: Artefakte, Fehler summieren sich über viele Zeitschritte auf. Kritische Prüfung nötig, ob Simulation realistisch ist!

Numerische Simulation

n-Körper-Probleme (*n body simulation*): Massenpunkte, die aufeinander Kräfte ausüben, z.B. Gravitation mit

$$\vec{F}_i = G m_i \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2} \vec{e}_{ij}$$

ist die Kraft auf den i-ten Massenpunkt, $\vec{x}_j$ Ort des j-ten Teilchens, m_j Masse des j-ten Teilchens, $\vec{e}_{ij}$ Richtungsvektor vom Teilchen i zum Teilchen j.

Numerische Simulation

Anwendungen:

Sonnensystem – wie entwickeln sich die Planeten- und Kleinkörperbahnen mit der Zeit? (Wichtiges Beispiel: Asteroide mit nahem Erd-Vorbeiflug!)

Großräumige Galaxiensimulationen (z.B. Macciò et al. am MPIA), bei denen Inhaltsstoffe (Sternpopulationen, Gas, Dunkle Materie) jeweils durch „Teilchen“ repräsentiert sind.

Erhaltungsgrößen

Form der Gesetze legt fest, dass bestimmte Größen sich mit der Zeit *nicht* ändern („Erhaltungssätze“, erst viel später, 1918, von Emmy Noether ganz verstanden und bewiesen).

Spezialfälle für Invarianz ⇒ Erhaltungsgröße:

Zeit-Translationsinvarianz ⇒ Energieerhaltung

Raum-Translationsinvarianz ⇒ Impulserhaltung

Rotationsinvarianz ⇒ Drehimpulserhaltung

Erhaltungsgrößen

Allgemeinere Bewegung im Gravitationsfeld einer Masse M:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = const.$$

Daraus z.B. ableitbar: Fluchtgeschwindigkeit! Wann fällt ein Körper zur Erde zurück?

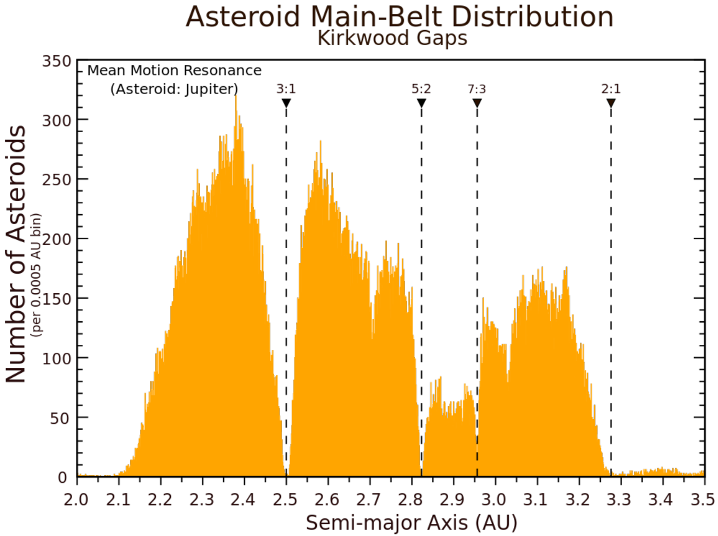
Möglich vs. unmöglich I: Stabilität

Im Prinzip: Anfangsbedingungen frei wählbar. Allerdings eine Einschränkung: Stabilität!

Einfachstes Beispiel: Bleistift, der auf der Spitze steht.

Komplexeres Beispiel: Umlaufbahnen von Asteroiden (Kirkwood-Lücken, wg. 3. Kepler, $T^2 \sim a^3$)

Möglich vs. unmöglich I: Stabilität



Möglich vs. unmöglich II

Wie hoch war die Wahrscheinlichkeit, dass sich unser Heimatplanet nicht in seinem jetzigen Abstand von der Sonne eingefunden hat, sondern deutlich weiter weg? (Schlüsselwort: Heimatplanet!)

Gleicher Denkfehler: Was für ein glücklicher Zufall, dass Leben gerade hier auf der angenehm temperierten Erde entstanden ist, nicht auf dem kalten Mars oder der extrem heißen Venus!

Vielfalt von möglichen Systemen eröffnet die Möglichkeit von anthropischen Argumenten, z.B. für unseren Planeten in einem stabilen System in der habitablen Zone – an dieser Stelle werden wir Bewohner doch wieder wichtig!