Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie

Kosmologie für Nicht-Physiker

Markus Pössel & Björn Malte Schäfer

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

16.10.2014 bis 22.1.2015

Inhaltsübersicht

Symmetrie und Invarianz

Meta-Grundfrage: Wie erhält man die Form physikalischer Gesetze?

Herumprobieren? Erweiterung bekannter Gesetzmäßigkeiten? Mathematik auf Anwendbarkeit durchforsten?

Allgemeiner: Festlegen, welche Eigenschaften die Gesetze haben sollen: Symmetrien!

Symmetrie und Invarianz

Beispiel: Orts- und Zeitpunktinvarianz

Newton'sche Mechanik hängt nicht davon ab, wo ich ein Experiment durchführe – allenfalls *relative Positionen* (relativ zur Erde) spielen eine Rolle. Ditto mit Zeitpunkt.

Beispiel: Planet kreist um Sonne – Vorgang würde genau so ablaufen, wenn Planet und Sonne jeweils 2 km weiter hinten säßen. (Position Planet *relativ* zur Sonne dagegen sehr wohl wichtig.)

Analogie: Schachspiel

Schönes Beispiel, wieviel Flexibilität sich ergibt, wenn man Anfangsbedingungen und Veränderungsregeln vorgibt.

Zwei Arten von Zugregeln: Ortsabhängige und ortsunabhängige.

Ortsabhängig: Bauern dürfen aus ihrer Ausgangsposition zwei Felder nach vorne ziehen, sonst nur jeweils eines. Bauern, welche die gegnerische Grundlinie erreichen, verwandeln sich.

Ortsunabhängig (bis auf Rand): Türme ziehen horizontal/vertikal ohne Figuren zu überspringen (etc. etc.).
Die ortsunabhängigen Zugregeln enthalten keine expliziten Ortsangaben, sagen nicht: „Wenn der Bauer auf C6 steht, darf er zwei Felder diagonal ziehen, sonst nur eines voran“

Nur relative Position (wo stehen die anderen Figuren?) zählt.

Symmetrie und Invarianz

Analog: Newton'sche Gesetze (wie reagiert Teilchen auf Kraft?) enthalten keine Orts- oder Zeitangaben.

Beispiel: Auf die gleiche Kraft reagiert das gleiche Teilchen mit der gleichen Beschleunigung, egal, wo es sich befindet.

Enthält wichtige Aussagen zu Raum und Zeit: Beide sind nichts Absolutes. Es gibt keine a priori ausgezeichneten Zeitpunkte.

Spezielle Relativitätstheorie

Erweiterung der Mechanik durch alternative Postulate für die Eigenschaften von Raum und Zeit

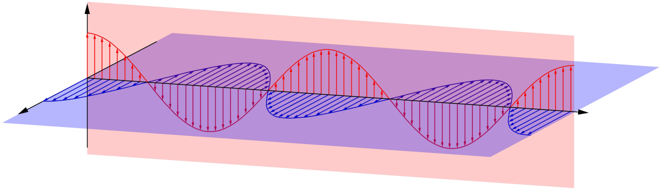
In Teilen entdeckt von Hendrik Antoon Lorentz, Henri Poincaré u.a. – in der heutigen Form aufgeschrieben („vom Kopf auf die Füße gestellt") von Albert Einstein 1905

Spezielle Relativitätstheorie

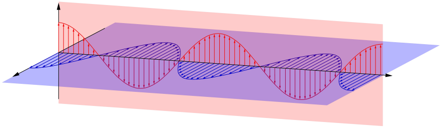
Einsteins Ausgangspunkt: Symmetrieprinzip.

Relativitätsprinzip: Die physikalischen Gesetze sind für alle freien Bezugssysteme (Inertialsysteme) die gleichen und hängen insbesondere nicht vom Bewegungszustand des (inertialen) Bezugssystems ab.

Newton'sche Mechanik hat das schon eingebaut (Schiffs-Beispiel, Flugzeug, . . .). Neu: Elektrodynamik!



Spezielle Relativitätstheorie: Lichtgeschwindigkeit



Elektrodynamik beschreibt auch Licht (= elektromagnetische Wellen).

Wäre die Lichtgeschwindigkeit relativ zu einem ausgezeichneten System definiert („Äther“), erhielte man mit üblicher Geschwindigkeitsaddition in relativ zueinander bewegten Systemen unterschiedliche Werte.

Einstein dehnt das Relativitätsprinzip auch auf die Lichtgeschwindigkeit aus! (Folglich gilt *nicht* die übliche Geschwindigkeitsaddition.)

Gleichzeitigkeit

Gleichzeitigkeitsdefinition per Lichtgeschwindigkeit: Zwei relativ zueinander ruhende Uhren A, B (Abstand voneinander: d) gehen synchron, wenn ein zur Zeit t_A (Anzeige der Uhr A) von A nach B abgeschicktes Signal zur Zeit

$$t_B = t_A + \frac{d}{c}$$

ankommt.

(Gegenbeispiel, nämlich nicht-synchrone Uhren: Zeitzonen z.B. beim Fliegen)

Speziell-relativistische Effekte

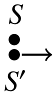
Jeweils zwischen relativ zueinander bewegten Inertialsystemen beurteilt:

- Bewegte Uhren gehen langsamer (Zeitdilatation)
- Bewegte Objekte haben in Ausdehnungsrichtung eine geringere Länge (Längenkontraktion)
- Für Ereignisse, die soweit auseinander liegen, dass nicht einmal ein beim ersten Signal ausgesandtes Lichtsignal rechtzeitig am Ort des Ereignisses ankäme: Reihenfolge wird von unterschiedlichen Systemen aus unterschiedlich beurteilt (Relativität der Gleichzeitigkeit)

Diese drei Effekte kombinieren sich so, dass alle Inertialbeobachter für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum tatsächlich denselben Wert $c = 299.792{,}458\ m/s$ herausbekommen.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

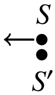
Relativ zueinander bewegte Systeme S, S' (eingezeichnet: Koordinatennullpunkt); hier aus Sicht von S:



In dem Moment, wo sich S und S' am gleichen Ort befinden: Lichtblitz (in alle Richtungen) ausgelöst.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

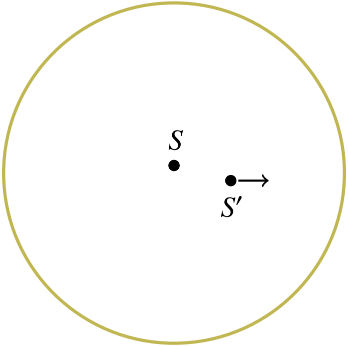
Relativ zueinander bewegte Systeme S, S' (eingezeichnet: Koordinatennullpunkt); hier aus Sicht von S':



In dem Moment, wo sich S und S' am gleichen Ort befinden: Lichtblitz (in alle Richtungen) ausgelöst.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

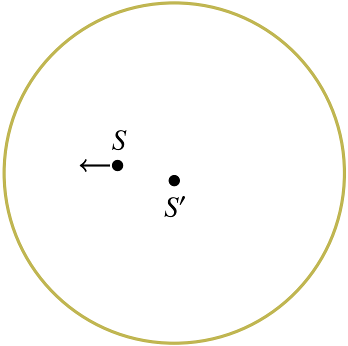
Situation etwas später, rekonstruiert im System S:



System S' hat sich nach rechts weiterbewegt; Lichtblitz hat sich (symmetrisch um Nullpunkt von S) ausgebreitet.

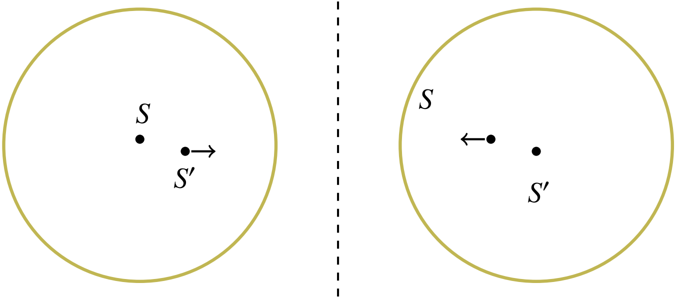
Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Situation etwas später, rekonstruiert im System S':



System S hat sich nach links weiterbewegt; Lichtblitz hat sich (symmetrisch um Nullpunkt von S') ausgebreitet.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit



Jedes der beiden Systeme S', S sieht seinen eigenen Nullpunkt im Mittelpunkt des Lichtblitzes!

Analogie: Foto derselben Situation aus unterschiedlichen Perspektiven. Keines der Fotos ist falsch; alle Perspektiven sind im Prinzip gleichberechtigt.

Relativistische Mechanik

„Kraft gleich zeitliche Änderung des Impulses“ bleibt gültig.

Träge Masse (wie in $F = m \cdot a$) nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit zu – bei zunehmender Geschwindigkeit wird es schwierig, ein Teilchen noch weiter zu beschleunigen!

Alternative Formulierung: Neben Ruhemasse trägt auch die Bewegungsenergie zur Trägheit bei; umgekehrt: auch Ruhemasse ist eine Form der Energie. Äquivalenz:

$$E = mc^2$$

Eine Konsequenz daraus: Unmöglichkeit, ein Teilchen mit Ruhemasse $\neq 0$ bis auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen! Lichtgeschwindigkeit ist Maximalgeschwindigkeit.

Bindungsenergie und Massendefizit

Eine Konsequenz von $E = mc^2$: Gebundene Systeme, die zwangsweise eine *Bindungsenergie* besitzen (deswegen gebunden!) haben eine geringere Masse als die Summe ihrer Einzelteile

Beispiel: Protonen und Neutronen im Vergleich mit Helium-4

Energiedifferenz beim Übergang zu stärker gebundenem System ist wichtigste Quelle der bei der Kernfusion freigesetzten Energie!

Allgemeine Relativitätstheorie

Albert Einsteins Gravitationstheorie, fertiggestellt November 1915

Gravitation ist keine Kraft, sondern Eigenschaft der Raumzeit-Geometrie

„Die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll; die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich verzerren soll“
(nach John Wheeler)

Anwendungen: Relativistische Effekte im Sonnensystem, Gravitationslinsen, Gravitationswellen, Schwarze Löcher, Kosmologie

Motivation für die geometrische Beschreibung

In der klassischen Mechanik, in geeignetem Bezugssystem (= Inertialsystem): Kräftefreie Teilchen bewegen sich auf Geraden

Ungeeignete Bezugssysteme: Alle Teilchen erfahren systematische Beschleunigungen (Zentrifugalbeschleunigung, Coriolis-Beschleunigung). Man könnte schließen: Dort wirken (Trägheits-)Kräfte!

Wie kann man „echte“ Kräfte von Trägheitskräften unterscheiden?

Echte vs. Trägheitskräfte

Erkunde die Situation mithilfe verschiedener Testteilchen (Teilchen, deren Anwesenheit die Situation nicht merklich verändert).

Grundregel: Trägheitskräfte sind in Wirklichkeit Beschleunigungen, für alle Testteilchen gleich. Echte Kräfte beeinflussen unterschiedliche Testteilchen in unterschiedlicher Weise.

Beispiel: Elektrostatische Kraft einer Ladungskugel Q auf ein Testteilchen der Ladung q ist

$$F = q\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}$$

(r ist der Abstand Kugelmittelpunkt–Teilchen, ϵ_0 eine charakteristische Konstante).

Beschleunigung unter gleichen Bedingungen (gleicher Ort): $\sim q/m$.

Echte vs. Trägheitskräfte: Gravitation

Problem: Gravitation

Beispiel: Newton'sche Gravitationskraft einer Kugelmasse M auf ein Testteilchen mit Masse m:

$$F = m\frac{GM}{r^2}$$

Beschleunigung ist für alle Testteilchen unter den gleichen Bedingungen dieselbe!

Nicht auf die übliche Weise von einer Trägheitskraft zu unterscheiden. Masse hat eine Doppelrolle: Trägheitsmaß und Gravitationsladung („träge gleich schwere Masse")

Eine neue Art von natürlicher Bewegung

Wenn man die *Gravitationsbeschleunigung* und die *Trägheitsbeschleunigung* nicht vollständig auseinanderhalten kann:

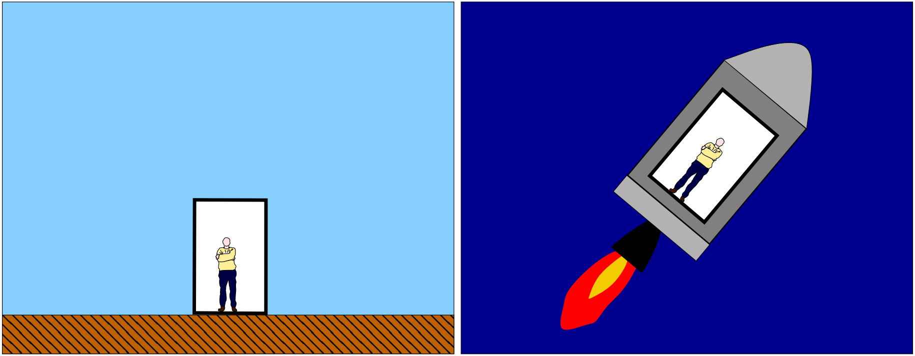
Ersetze

Testteilchenbewegung = Trägheitsbewegung + Ablenkung durch Kräfte

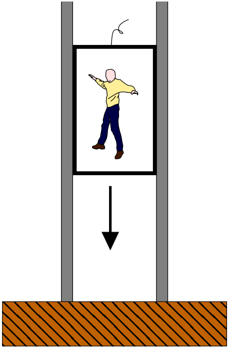
durch

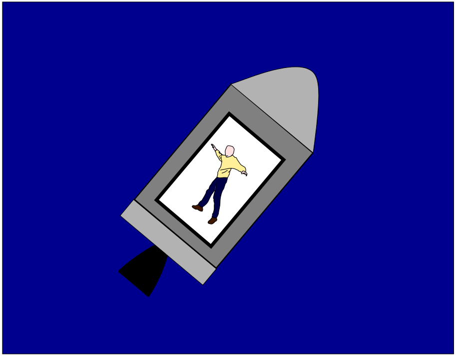
Testteilchenbewegung = Freier Fall + Ablenkung durch Kräfte

Ist Gravitation = Trägheitsbeschleunigung?



Ist Gravitation = Trägheitsbeschleunigung?





Mikrogravitation im freien Falll

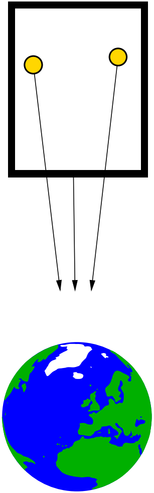
Kapsel im Fallturm des
Glenn Research Center

Bild: NASA/GRC/P. Riedel, A. Lukas

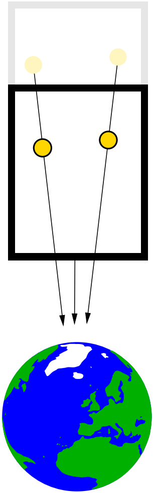
Mikrogravitation im freien Fall = Umlaufbahn

Chris Hadfield mit Wasserblase an Bord der ISS. Bild: NASA

Wirklich keine Schwerkraft im freien Fall?

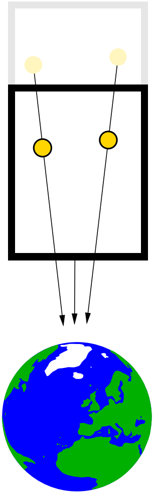


Wirklich keine Schwerkraft im freien Fall?



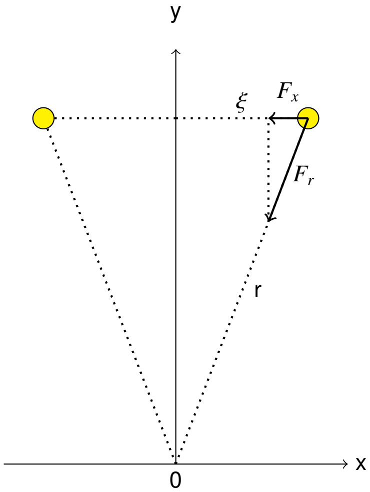
Gezeitenkräfte!

Wirklich keine Schwerkraft im freien Fall?



Gezeitenkräfte!

Gezeitenkräfte



$$F_x = \frac{\xi}{r} \cdot F_r$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{GMm}{r^3} \cdot \xi$$

Stärke der Gezeitenkraft fällt schneller ab als $1/r^2$!

Grenzen des freien Falls

Unser Beispiel ist repräsentativ insofern, als Gezeitenkraft proportional zum Abstand zwischen zwei Körpern, $F \sim \xi$

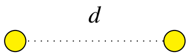
Wartet man lange genug, sieht man Effekte auch für kleines ξ.

Einstein'sches Äquivalenzprinzip

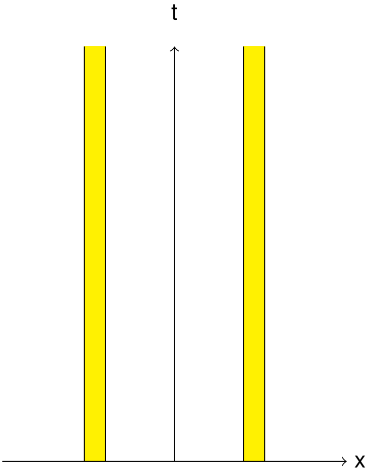
In einer infinitesimal kleinen Raumzeitregion sind die Gesetze der Physik, formuliert in einem frei fallenden Bezugssystem, die gleichen wie in Abwesenheit von Gravitation

In der Praxis: Für hinreichend kleine „Fahrstuhlkabinen“ sind die Gezeiteneffekte über hinreichend kleine Zeiträume nicht nachweisbar.

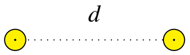
Raumzeit-Bild: Kugeln im Weltraum



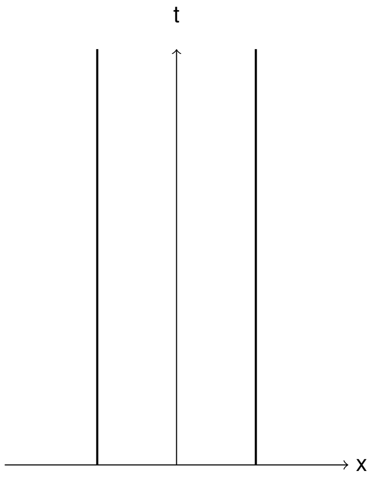
Raumzeitdiagramm dazu: siehe rechts.



Raumzeit-Bild: Kugeln im Weltraum

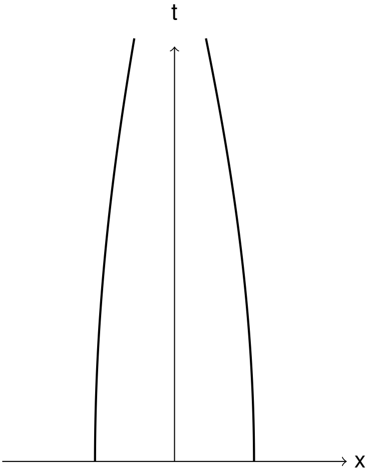


Raumzeitdiagramm
(vereinfachte Version)



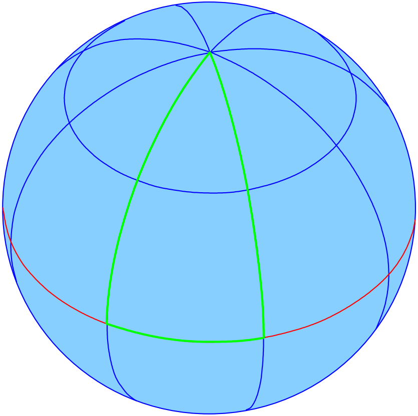
Raumzeitdiagramm: Kugeln im freien Fall

Ursprünglich sind die Weltlinien parallel. Dann konvergieren sie!



...was sind demnach Weltlinien für freien Fall?

Wie im Beispiel konvergieren (oder divergieren) Weltlinien für den freien Fall, selbst wenn sie ursprünglich parallel sind. Geometrische Analogie:



Legt Analogie mit gekrümmten Oberflächen nahe!

Keine Kräfte: Gerade Weltlinien	Geradestmögliche Kurven in der Ebene: Geraden(abschnitte)
Freier Fall: Weltlinien können konvergieren/divergieren	auf gekrümmter Oberfläche: geradestmögliche Kurven können konvergieren/divergieren
Äquivalenzprinzip	infinitesimaler Ausschnitt aus gekrümmter Fläche sieht flach aus

Zeit und Gravitation: Trödelprinzip

An dieser Stelle lässt sich mithilfe von Weltlinien noch näher ausführen, was Gravitation mit Zeitverzerrung zu tun hat:

Trödelprinzip: Die Weltlinie im freien Fall zwischen A und B verläuft so, dass für den fallenden Körper die maximale Eigenzeit vergeht; Gefälle der „Zeitgeschwindigkeiten“ entspricht Gravitationsfeld.

Tatsächlich: Newton’sche Gravitation ist in Einsteins Theorie natürlicherweise durch variable „Zeitgeschwindigkeit“ (Koordinatenzeit vs. Eigenzeit) realisiert.

Details: Pössel, *Das Einstein-Fenster*, Kap. 4 und 5

. . . und was ist mit dem Gummituch?

[Oft verwendetes Bild: Gravitation ist wie eine schwere Kugel auf einem Gummituch, welche die Bahn kleiner Murmeln auf dem Gummituch ablenkt]

. . . allenfalls als sehr allgemeines Bild „Raumzeiteigenschaften beeinflussen Bewegung"

Potenziell missverständlich:

- Newtonsche Gravitation ist fast nur Zeitverzerrung, nicht Raumkrümmung
- Merkwürdige Doppelrolle der Gravitation in der Analogie
- Man darf nicht zu genau hinsehen (Middleton & Langston, *American Journal of Physics* **82** (2014), 287)

Beschreibung gekrümmter Flächen

Zweidimensionales Beispiel: Buckelpiste (oder vereinfachte Form davon)

Bild: Andreas Hallerbach unter Lizenz CC-BY-NC-ND 2.0

Beschreibung gekrümmter Flächen

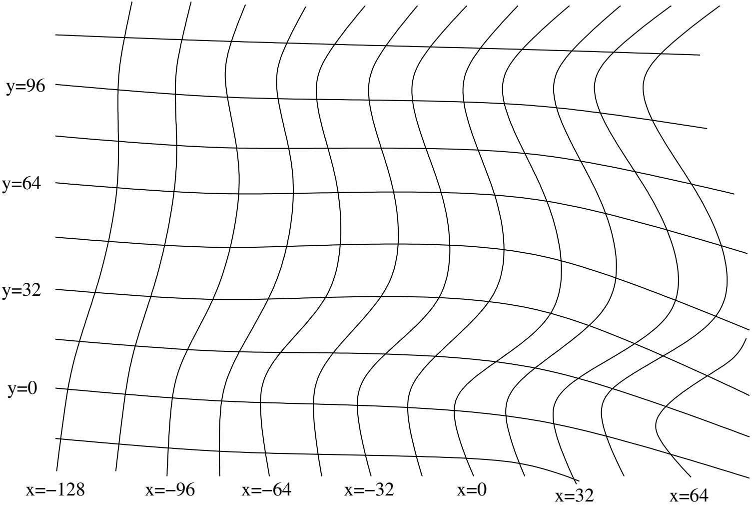
Besser: Oberfläche besteht aus glattem, hartem Fels.

Nächster Schritt: Bemale mit zwei Familien von Linien: x-Linien und y-Linien.

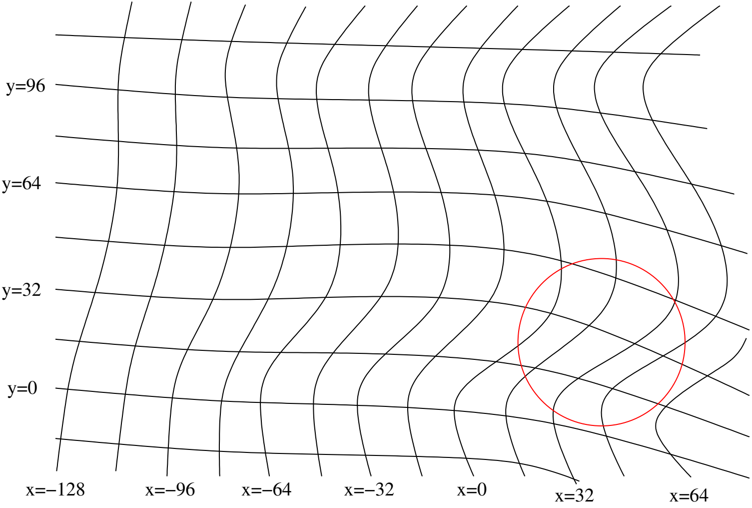
Keine x-Linie schneidet irgendeine andere x-Linie.
Keine y-Linie schneidet irgendeine andere y-Linie.
Jede x-Linie schneidet jede y-Linie.
x-Linien sind durchnummeriert; y-Linien sind durchnummeriert.

Die Linien verlaufen im allgemeinen schief und gebogen.

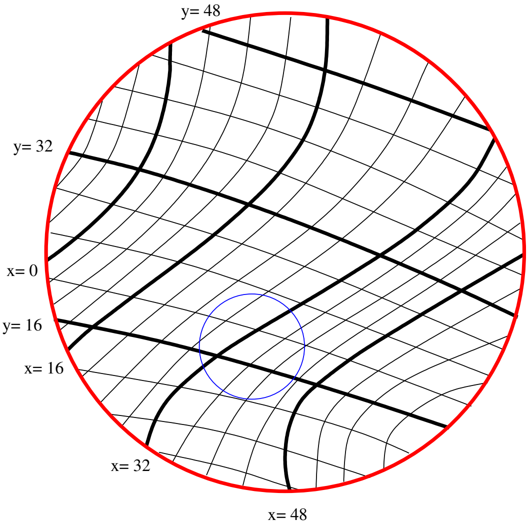
Gekrümmter Fläche: Vogelperspektive



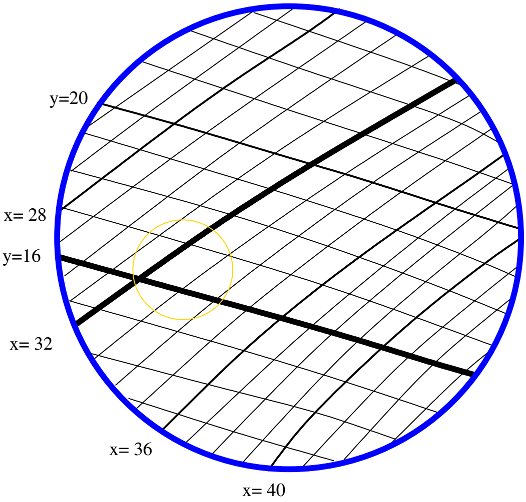
Gekrümmte Koordinaten: Hineinzoomen



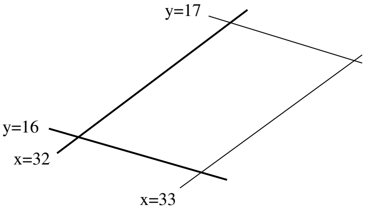
Gekrümmte Koordinaten: Hineinzoomen



Gekrümmte Koordinaten: Hineinzoomen

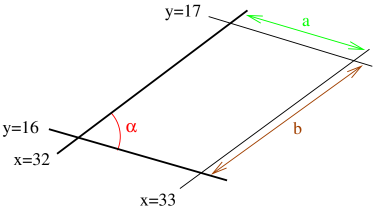


Gekrümmter Fläche: Geometrische Beschreibung



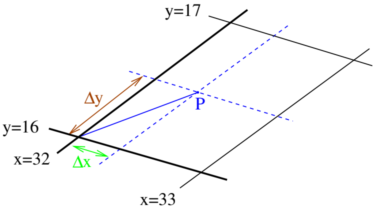
Das ist recht einfach: Parallelogramm!

Beschreibung gekrümmter Flächen



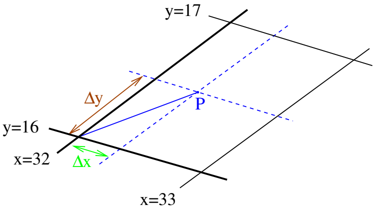
Senkrecht zur (lokal fast ebenen) Oberfläche, längentreue Abbildung: 3 charakteristische Parameter ablesbar

Beschreibung gekrümmter Flächen



Wie lang ist die blaue Linie zwischen $(32, 16)$ und P?

Beschreibung gekrümmter Flächen



$\vec{P} = (b\,\Delta y)\,\vec{u}_y + (a\,\Delta x)\,\vec{u}_x$ where $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = \cos\alpha$ means that

$$|\vec{P}|^2 = a^2\,\Delta x^2 + 2ab\,\cos\alpha\,\Delta x\Delta y + b^2\,\Delta y^2.$$

Mit dieser Verbesserung können unsere Koordinaten verwendet werden, um (zunächst im Kleinen) Längen zu messen!

The metric

$$\Delta s^2 \;=\; |\vec{P}|^2 = a^2\,\Delta x^2 + 2ab\,\cos\alpha\,\Delta x\Delta y + b^2\,\Delta y^2$$

Drei unabhängige Parameter - die wir umbenennen:

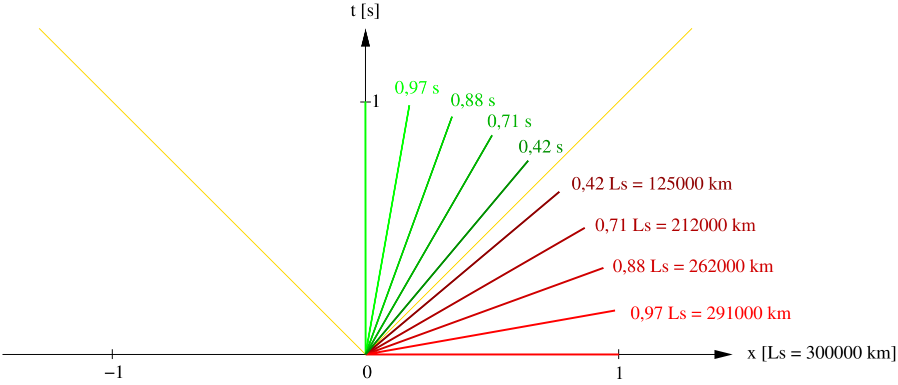
$$\Delta s^2 \;=\; g_{11}\,\Delta x^2 + 2g_{12}\,\Delta x\Delta y + g_{22}\,\Delta y^2.$$

Achtung: Im allgemeinen sind die Koeffizienten ortsabhängig, $g_{ij}(x,y)$. Exakt ist die Formel nur, wenn die Koordinatenumgebung infinitesimal klein ist:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; g_{11}(x,y)\,\mathrm{d}x^2 + 2g_{12}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + g_{22}(x,y)\,\mathrm{d}y^2.$$

$\mathrm{d}s^2$ heißt **Metrik**, die $g_{ij}(x,y)$ heißen **metrische Koeffizienten**.

Vom Raum zur Raumzeit: Metrik der SRT



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2$$

Vom Raum zur Raumzeit: Metrik der SRT

Raumzeit-Metrik kodiert in einheitlicher Weise:

Koordinatenbeschreibung für räumliche Abstände

Koordinatenbeschreibung für zeitliche Abstände (wieviel Zeit auf einer bestimmten Uhr vergeht)

Ausbreitung von Licht ($\mathrm{d}s^2 = 0 \Rightarrow$ z.B. in x-Richtung $\mathrm{d}x^2 - c^2\mathrm{d}t^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}x = \pm c\mathrm{d}t$)

Freiheit der Koordinatenwahl

An den metrischen Koeffizienten lässt sich noch nicht ablesen, ob eine Fläche (oder ob eine Raumzeit) flach ist oder nicht (=gekrümmt).

Flache Fläche = Ebene; flacher Raum = euklidisch; flache Raumzeit = spezielle Relativitätstheorie

Wir hätten auch auf einer Ebene geschwungene Linien für unsere Koordinaten wählen können!

Gauß, Riemann, Ricci-Curbastro u.a. berechneten aus den metrischen Koeffizienten Größen, die genau dann verschwinden, wenn Ebene/Raum/Raumzeit flach sind: Krümmungstensoren (Verallgemeinerung von „Krümmungsradius“).

Gravitationsquellen

Wheeler-Reprise: „Die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll; die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich krümmen soll“

Einstein-Gleichungen

$$G_{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}$$

links: eine besondere Krümmungsgröße (Einstein-Tensor), rechts: Energie-Impuls-Tensor; Verallgemeinerung der Masse.

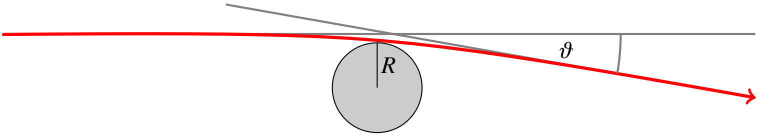
Gravitationsquellen: Verallgemeinerung von Newton, dort einzige Gravitationsquelle *Masse* (relativistisch: Ruhemasse).

Bei Einstein ist auch Energie eine Gravitationsquelle ($E = mc^2$), außerdem: Druck! (Letzteres kann zu Stabilitätsproblemen bei kompakten Körpern führen.)

Klassische Effekte

1. Gravitations-Rotverschiebung
2. Lichtablenkung durch Massen
3. Periheldrehung
4. Shapiro-Effekt

Lichtablenkung



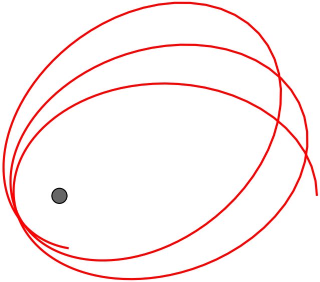
Rechnungen im Rahmen der ART ergeben (im Bogenmaß):

$$\vartheta = \frac{4GM}{c^2 R}.$$

Newton'sche Rechnung (Johann Georg von Soldner 1804) ergibt nur den halben Wert (Hintergrund: Raumkrümmung trägt noch einmal denselben Ablenkungswinkel bei wie Zeitverzerrung).

Am Sonnenrand: $1{,}75''$. Messungen (erstmals Eddington und andere 1919) bestätigen den Einstein'schen Wert.

Periheldrehung



Relativistische Periheldrehung: Perihel eines Planeten wandert mit der Zeit; umso stärker, je exzentrischer die Bahn.

Sonnensystem: größter Effekt bei Merkur, anomale Periheldrehung von $43''$ pro Jahrhundert (anomal = zusätzlich zu den Gravitationseffekten der anderen Planeten)

Periheldrehung

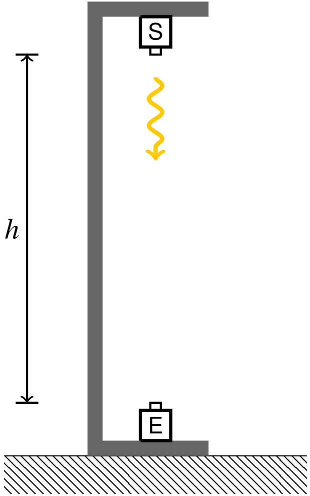
Doppelpulsar PSR J0737-3039 als sehr kompaktes System (zwei Neutronensterne, die beide Pulsare sind): relativistische Periheldrehung von $16{,}9^\circ$ pro Jahr!

Diese Systeme sind überhaupt die besten Testfälle für die relativistische Mechanik – auch Lichtablenkung, Shapiro-Effekt etc; vgl. den Artikel zu den Forschungen von Michael Kramer in *Max Planck Forschung 3/2013*, `http://www.mpg.de/mpf_2013_3`

Shapiro-Effekt

Verzerrte Raumzeit als „ortsabhängiger Brechungsindex“ führt zu Laufzeitverzögerungen; nachgemessen durch Radarsignale zu den inneren Planeten, an der Sonne vorbei.

Gravitations-Rotverschiebung



Situation: Licht fällt im Schwerefeld der Erde senkrecht nach unten.

Wellenlängenverschiebung

$$z \equiv \frac{\lambda_E - \lambda_S}{\lambda_S}$$

ist gegeben durch

$$z = -\frac{gh}{c^2} = -\frac{\Delta\Phi}{c^2},$$

bei $g \sim 9,81\ m/s^2$ der Gravitationsbeschleunigung und der Potentialdifferenz $\Delta\Phi = \Phi(r_S) - \Phi(r_E)$.

Rotverschiebung und Gang von Uhren

Uhren vergleichen mithilfe von Lichtsignalen: Rotverschiebung (diesmal nicht für Frequenz der Lichtwellen, sondern der aufeinanderfolgenden Signale!) ergibt:

Sei ν_1 die Tick-Frequenz aller unserer Standarduhren. Sei eine dieser Uhren am Punkt 1 im Gravitationspotential, Radialkoordinate r_1. Von einem Ort 2 gesehen (Lichtsignal läuft radial nach außen nach $r_2 > r_1$) tickt die tieferliegende Uhr dann mit Frequenz ν_2, wobei

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 - \frac{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}{c^2} = 1 + \frac{GM}{c^2}\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] < 1,$$

also mit geringerer Frequenz: Uhren tiefer im Gravitationsfeld gehen langsamer!

Relativität und GPS

Rotverschiebung: Gangunterschied irdische vs. GPS-Satellitenuhren.

Lösung der GPS-Konstrukteure: normale Grundfrequenz der verwendeten Atomuhren ist $10{,}23\ MHz$; Satellitenuhren sind aber eingestellt auf

$$10{,}229999995453\ MHz.$$

Andernfalls nach einer Woche Abweichungen in der Größenordnung von $1\ m$ (vergleichbar groß wie die entscheidenden Fehlerquellen bei GPS). Vorsicht, es gibt eine beliebte, aber falsche Rechnung, die deutlich größere Werte ergibt!