

# Schwarze Löcher I

Vom Schwarzen Loch bis zum Urknall: Einsteins  
Astrophysik für Nicht-Physiker

**Markus Pössel & Björn Malte Schäfer**

Haus der Astronomie/Institut für Theoretische Astrophysik

17.12.2015

# Inhalt

- 1 Prolog I: Fluchtgeschwindigkeit**
- 2 Prolog II: Achilles und die Schildkröte**
- 3 Schwarzschildmetrik**
- 4 Radiale Ausbreitung von Licht in der Schwarzschild-Raumzeit**
- 5 Stabilität und Kompaktheit: Wie kann ein Schwarzes Loch entstehen?**

# Schwarze Löcher

Michell 1784, aufgegriffen von Laplace

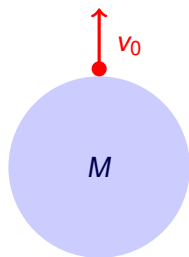
Schwarzschild-Lösung für die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie 1916 – aber lange nicht erkannt, was es damit auf sich hat

1960er/1970er Jahre: Heutiges Bild „Schwarzes Loch“ (Ausdruck geprägt von John Wheeler): Raumbereich, Größe charakterisiert durch Schwarzschild-Radius

$$\mathcal{R} \equiv \frac{2GM}{c^2},$$

mit Einbahnstraßenfunktion: Materie kann hineinfallen, aber keine Materie kann jemals wieder hinaus; das folgt aus der kausalen Struktur: Lichtbahnen rund um das Schwarze Loch

# Prolog I: Fluchtgeschwindigkeit



Ausgangssituation: Objekt mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  von der Oberfläche aus senkrecht nach oben werfen.

Was passiert? (Wettstreit Schwerkraft vs. Nachlassen der Schwerkraft bei zunehmender Entfernung)

# Fluchtgeschwindigkeit

Einfachste Lösung über Energiesatz:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}.$$

Wenn Teilchen „ins Unendliche entkommt“:  $r \rightarrow \infty$ , insbes.  $E > 0$ .  
Damit Bedingung für Entkommen:

$$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R} \geq 0,$$

Im Grenzfall (= 0): Fluchtgeschwindigkeit  $v_F$ ,

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = c \sqrt{\frac{2GM}{c^2 R}} = c \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{R}}$$

Dort schon sichtbar: *Kompaktheit*  $\mathcal{R}/R$  ist das Wichtige!

# Fluchtgeschwindigkeiten

Erde:  $11,2 \text{ km/s}$   $\Rightarrow$  wichtig für Weltraumstarts

Weißer Zwerg:  $6000 \text{ km/s}$

Neutronenstern:  $200\,000 \text{ km/s}$

...was, wenn **Fluchtgeschwindigkeit = Lichtgeschwindigkeit?**

Erstmals Michell, 1784.

# Fluchtgeschwindigkeit = Lichtgeschwindigkeit?

29. If there should really exist in nature any bodies, whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are more than 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us; or if there should exist any other bodies of a somewhat smaller size, which are not naturally luminous; of the existence of bodies under either of these circumstances, we could have no information from sight; yet, if any other luminous bodies should happen to revolve about them we might still perhaps from the motions of these revolving bodies infer the existence of the central ones with some degree of probability, as this might afford a clue to some of the apparent irregularities of the revolving bodies, which would not be easily explicable on any other hypothesis; but as the consequences of such a supposition are very obvious, and the consideration of them somewhat beside my present purpose, I shall not prosecute them any farther.

John Michell in *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Bd. 74 (1784), S. 34–57

## Prolog II: Achilles und die Schildkröte



Eines der Paradoxa des Zenon von Elea (490-430 v. Chr.): Kann Achilles die Schildkröte jemals überholen?

Nein! Ausgangsposition der Schildkröte ist  $x_0$ . Bis Achilles  $x_0$  erreicht hat, ist die Schildkröte aber bereits zum Ort  $x_1$  weitermarschiert! Bis Achilles  $x_1$  erreicht hat, ist sie wieder etwas weiter am Ort  $x_2$ , und unendlich so weiter!

Ergo: (Stetige) Bewegung ist unmöglich.



# Achilles und die Schildkröte: Zeit(schritt)koordinate

Achilles Geschwindigkeit  $v$ , Schildkröte Geschwindigkeit  $w < v$ ,  
Initialdistanz  $x_0$ .

Schrittnr.	Zeit	Ort Achilles	Ort Schildkröte
0	0	0	$x_0$
1	$x_0/v$	$x_0$	$x_1 = x_0(1 + w/v)$
2	$x_1/v$	$x_1$	$x_2 = x_0(1 + w/v + [w/v]^2)$
$i$	$x_{i-1}/v$	$x_{i-1}$	$x_i = x_0 \cdot \sum_{j=1}^i (w/v)^j$

Geometrische Reihe:

$$x_i = x_0 \cdot \sum_{j=1}^i \left(\frac{w}{v}\right)^j = x_0 \frac{1 - (w/v)^{i+1}}{1 - (w/v)}$$

# Achilles und die Schildkröte: Zeit(schritt)koordinate

Mit der Funktion

$$x_i = x_0 \frac{1 - (w/v)^{i+1}}{1 - (w/v)}$$

kann man den Ort der Schildkröte für beliebige Zeitschritte und Zeitschrittbruchteile berechnen: Nutze  $i$  als neue Zeitkoordinate!

Neue Zeit  $i$  entspricht alter Zeit  $t(i)$

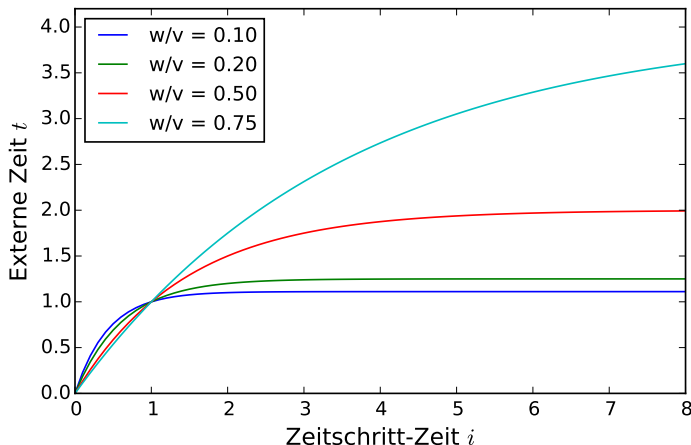
$$t(i) = x_{i-1}/v = \left(\frac{x_0}{v}\right) \left(\frac{1 - (w/v)^i}{1 - (w/v)}\right).$$

bzw.

$$i(t) = \ln \left[ 1 - \left(\frac{vt}{x_0}\right) (1 - w/v) \right] / \ln(w/v)$$

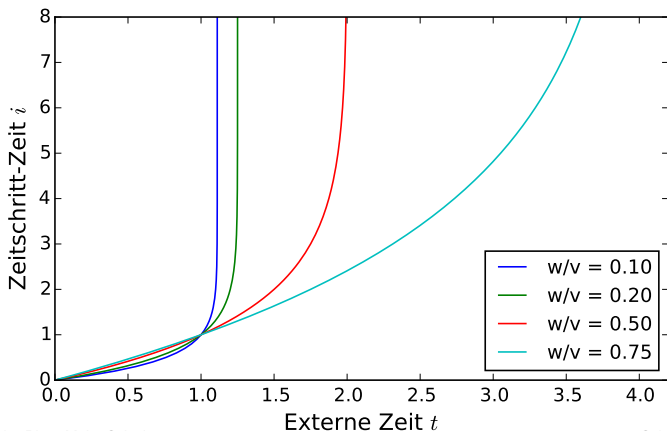
# Achilles und die Schildkröte: Zeit(schritt)koordinate

Grafische Darstellung alte Zeitkoordinate  $t$  als Funktion der neuen Zeitkoordinate  $i$  (der Einfachheit halber bei  $x_0/v = 1$ ):



# Achilles und die Schildkröte: Zeit(schritt)koordinate

Umgekehrt: Grafische Darstellung neue Zeitkoordinate  $i$  gegen alte Zeitkoordinate  $t$  (wieder bei  $x_0/v = 1$ ): Zeitkoordinate  $i$  geht gegen unendlich, deckt nicht das ganze Gebiet ab!



# Achilles und die Schildkröte: Zeit(schritt)koordinate

Noch einmal anders ausgedrückt: Steigung der Kurve

$$\frac{di}{dt} = \frac{(w/v - 1)}{[1 - t(1 - w/v)]} \cdot \frac{1}{\ln(w/v)}$$

geht für  $x \rightarrow 1/(1 - w/v)$  gegen unendlich!

Beispiel für eine **Koordinatensingularität**: Physik der Situation ist völlig normal (insbesondere: Achilles holt die Schildkröte ein!), aber Koordinaten überdecken nicht den gesamten verfügbaren Bereich.

# Schwarzschildmetrik

Februar 1916: Karl Schwarzschild versucht, die Metrik für ein *Punktteilchen* aufzustellen.

In der Newton'schen Gravitation: Kugelsymmetrische Massen können vom Gravitationsfeld her so behandelt werden, als sei die Masse im Kugelmittelpunkt konzentriert  $\Rightarrow$  Punktteilchen als „Elementarbausteine“

Schwarzschilds Ansatz: Kugelsymmetrie, Zeitunabhängigkeit

# Schwarzschildmetrik

Ansatz führt auf Gleichungen, die Schwarzschild lösen konnte.  
Resultierende Metrik (Schwarzschild 1916):

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right] c^2 dt^2 + \left[ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

für Masseparameter  $M$ , in Kugelkoordinaten. Einmal mehr  
Gravitations-Längenskala einführen,  $\mathcal{R} \equiv 2GM/c^2$   
(Schwarzschildradius):

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{\mathcal{R}}{r} \right] c^2 dt^2 + \left[ 1 - \frac{\mathcal{R}}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$dr^2$ -Koeffizient der Metrik wird unendlich bei  $r = \mathcal{R}$ ,  $dt^2$ -Koeffizient  
wird null! ( $r \rightarrow 0$  auch problematisch, aber dazu später.)

# Schwarzschildmetrik

Betrachte Uhr, die bei konstantem  $r$  ruht:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left[1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right] c^2 dt^2 = -\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right] c^2 dt^2$$

Denselben Ausdruck hatten wir bereits im Abschnitt *Gravitations-Rotverschiebung* von Teil 5, ART, aus dem Äquivalenzprinzip abgeleitet!

Vergleich mithilfe von Licht bzw. Uhrentransporte ergeben: Uhren bei kleinerem  $r$  gehen langsamer als solche bei größerem  $r$ !



# Gravitations-Zeitdilatation

$r/\mathcal{R}$	$\lambda(r)$
100.000	0.995
10.000	0.949
5.000	0.894
2.000	0.707
1.100	0.302
1.010	0.100
1.001	0.032

mit  $\lambda(r)$  der Ganggeschwindigkeit relativ zu einer Uhr im Unendlichen,  $r \rightarrow \infty$ ,

$$\lambda(r) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}$$

Modellsituation: Bei konstantem  $r$  schweben (z.B. an Halterung oder mit Raketenantrieb) und Vorgänge betrachten. Vorgänge bei  $r' < r$  laufen (beobachtet) langsamer ab und kommen für  $r' \rightarrow \mathcal{R}$  zum Stillstand. Allerdings: Auch Licht erfährt dort unendlich große Rotverschiebung!

# Radiale Lichtausbreitung

Bedeutung der SRT- und ART-Metrik: Lichtausbreitung entspricht

$$ds^2 = 0$$

Für die Schwarzschild-Metrik, radiale Bewegung ( $d\theta = d\phi = 0$ ):

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \cdot \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = \pm c \cdot \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right)$$

Wieder ist  $r \rightarrow \mathcal{R}$  sonderbar:

Radiale (Koordinaten-)Lichtgeschwindigkeit geht dort gegen Null!

## Weiterrechnen, solange $r > \mathcal{R}$

Newton'sche Gravitation: Gravitationsfeld außerhalb einer kugelsymmetrischen Massenordnung ist analog zu Punkteilchen-Feld.

Pragmatische Haltung nach 1916: Mithilfe der Schwarzschildmetrik die Gravitationswirkung von Himmelskörpern berechnen. Dabei bleibt man immer außerhalb von  $r = \mathcal{R}$ !

Birkhoff-Theorem (Birkhoff 1923): Jeder kugelsymmetrische Vakuumbereich, der den Einstein-Gleichungen genügt, hat als Metrik die Schwarzschildmetrik.

## Oder lauert hier eine Schildkröte?

Erkenntnis ab 1960er Jahre: Die Schwarzschild-Singularität ist ein Koordinatenproblem!

Schnellster Weg (historisch anders):

Eddington-Finkelstein-Koordinaten, neue Zeitkoordinate

$$dt_i = dt + \frac{dr/c}{r/\mathcal{R} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad t_i = t + \frac{\mathcal{R}}{c} \ln(r/\mathcal{R} - 1)$$

In den Koordinaten  $t_i, r$  formuliert sieht die Schwarzschild-Metrik aus wie

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right) (cdt_i + dr)^2 + 2(cdt_i + dr)dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

# Eigenschaften der Metrik in EF-Koordinaten

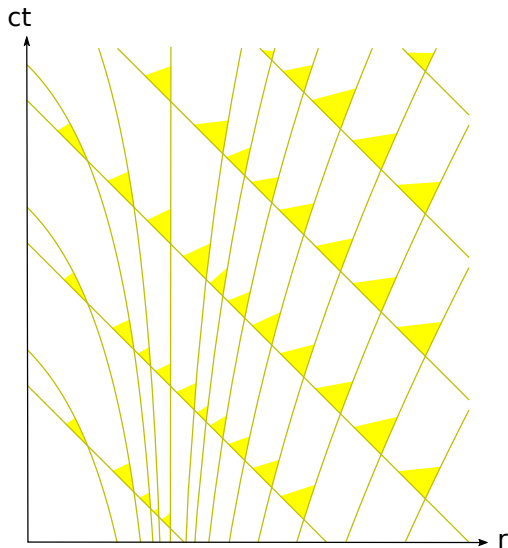
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right)(cdt_i + dr)^2 + 2(cdt_i + dr)dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Kein offensichtlich singuläres Verhalten mehr bei  $\mathcal{R} = r$

Nach innen laufende Lichtstrahlen haben die sehr einfache Bewegungsgleichung  $r = -ct + r_0$ .

Auf ähnliche Weise bekommt man auch die nach außen laufenden Strahlen; hilfreich: Darstellung im Raumzeitdiagramm für  $t_i, r$ .

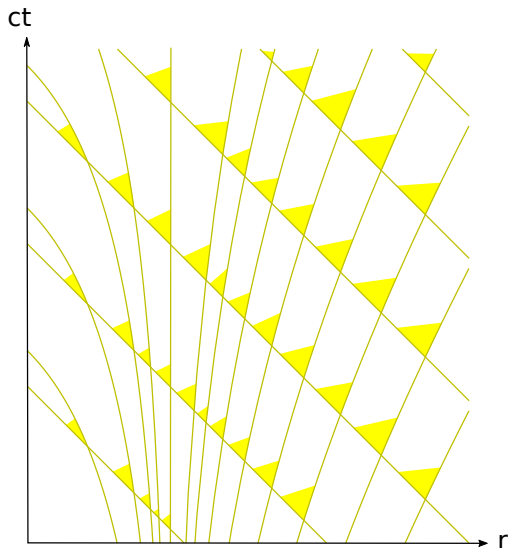
# EF-Raumzeitdiagramm



Raumzeitdiagramm mit  
Koordinaten  $r$  und  $ct_i$

Interessanter Effekt:  
(eigentlich) nach außen  
laufende Lichtlinie steht  
bei einem  $r$ -Wert  
senkrecht, und zwar bei  
 $r = \mathcal{R}$ !

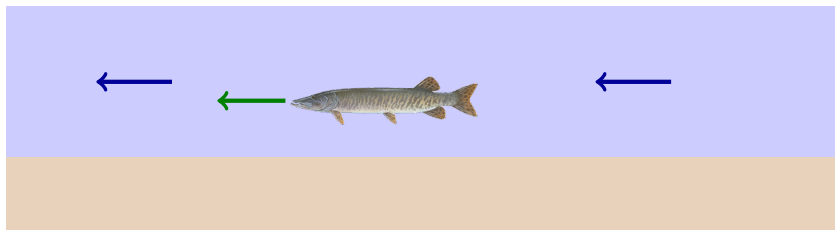
# EF-Raumzeitdiagramm



Dreidimensional: Grenze entspricht einer Kugel, genannt **Horizont**. Aus der Horizontregion kann kein Licht, und damit auch nichts anderes, nach außen gelangen!

Das entspricht einer allgemeinen geometrischen Definition eines Schwarzen Lochs: Region, in die etwas hinein, aus der aber nichts nach außen gelangen kann.

# Flussmodell für Schwarze Löcher



Modell: Fische schwimmen mit konstanter Geschwindigkeit („Fischgeschwindigkeit“); Fluss fließt je nach Profil schneller oder langsamer – Möglichkeit von Horizonten!

Flussmodell ist sogar exakt formulierbar, cf.  
<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0411060>



# Das Flussmodell für Schwarze Löcher

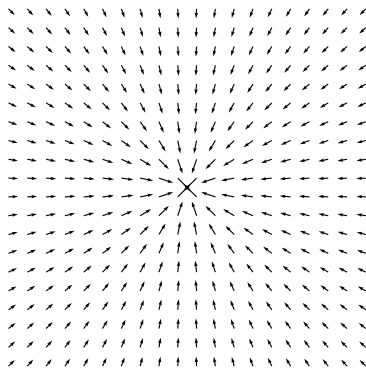
Quantitativ: Fluss mit  
Flussgeschwindigkeit

$$\beta = \sqrt{\frac{2GM}{c^2 r}}$$

in Koordinaten  $T, x, y, z$ .

$T$  als Zeitanzeige einer im Fluss  
mitbewegten Uhr.

$\beta(r)$  z.B. aus der Newton'schen  
Physik geborgt  
(Energieerhaltung beim Einfall  
aus dem Unendlichen)



# Flussmodell

Bewegung mit dem Fluss entspricht freiem Fall; mitbewegte Raumkoordinaten definiert via

$$dx'^{\mu} = dx^{\mu} + \beta^{\mu} dT,$$

where  $\beta^{\mu} = \beta(r)(0, -x/r, -y/r, -z/r)$ .

Äquivalenzprinzip sagt: In diesen Koordinaten ist die Metrik (in infinitesimaler Umgebung) flach,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} (dx^{\mu} + \beta^{\mu} dT)(dx^{\nu} + \beta^{\nu} dT) \\ &= -c^2(1 - \beta^2/c^2) dT^2 + 2\beta_i dx^i dT + dx^i dx_i \\ &= -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2GM}{r}} dr dT + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \end{aligned}$$

# Flussmodell eines Schwarzen Lochs

Versuche, den gemischten Term  $dT dr$  zu beseitigen durch

$$T = t + f(r) \quad \Rightarrow \quad f'(r) = -\frac{\sqrt{2GM/r}}{c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}$$

Das ergibt die Metrik

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + r^2 d\Omega^2$$

also Standardform von Schwarzschild. Ursprüngliche Metrik war nur alternative Koordinatenwahl (Gullstrand-Painlevé).

Nachteil des Modells: Reibungskräfte/Viskosität irreführend!

# Wie kann ein Schwarzes Loch entstehen?

Anknüpfung an Vorlesung BMS vom 12.12. und an Einstein 1939:  
Kann solch eine Konfiguration „Schwarzschildmetrik mit Horizont“  
überhaupt entstehen?

Schwarzschild-Radius („Radius des Schwarzen Loches“):

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\equiv \frac{2GM}{c^2} = 1.5 \cdot 10^{-27} \text{ m} \left( \frac{M}{\text{kg}} \right) \\ &= 8.9 \text{ mm} \left( \frac{M}{M_{\oplus}} \right) = 3 \text{ km} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \end{aligned}$$

# Schwarze Löcher und mittlere Dichte

Muss man Materie besonders dicht komprimieren, um  $r \rightarrow \mathcal{R}$  zu erreichen? (Häufiges Vorurteil: Schwarze Löcher sind unheimlich dicht!)

Naive mittlere Dichte (aber Vorsicht: in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Geometrie *im* Schwarzen Loch gänzlich ungewohnt!):

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\mathcal{R}^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} = 10^{80} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(\frac{M}{1 \text{ kg}}\right)^{-2} = 10^{19} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$$

# Schwarze Löcher und mittlere Dichte

Bezeichnung	$\mathcal{R}$ [m]	Dichte [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
Mensch (80 kg)	$10^{-25}$	$10^{76}$
Erde	$10^{-2}$	$10^{30}$
Jupiter	3	$10^{25}$
Sonne	3000	$10^{19}$
Milchstraßen - SL (4 Mio. $M_{\odot}$ )	$10^{10}$	$10^6$
Milchstraße ( $10^{12} M_{\odot}$ )	$10^{15}$	$10^{-5}$
10mal Milchstraße	$10^{16}$	$10^{-6}$

Vergleich: Dichte Atomkern  $10^{17} \text{ kg}/\text{m}^3$ , Wasser  $1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ , Luft  $1 \text{ kg}/\text{m}^3$

# Stabilitätsbetrachtungen: Schwarzschild 1916

„Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit“, 24.2.1916

ist damit eine Grenze der Konzentration gegeben. über die hinaus eine Kugel inkompressibler Flüssigkeit nicht existieren kann. Wollte man unsere Gleichungen auf Werte  $\cos \gamma_a < 1/3$  anwenden, so erhielte man bereits außerhalb des Kugelmittelpunktes Unstetigkeiten. Man kann jedoch für größeres  $\gamma_a$  Lösungen des Problems finden, welche wenigstens außerhalb des Kugelmittelpunktes stetig sind, wenn man zu dem Fall  $\lambda = 0$  übergeht und die Bedingung  $K = 0$  (Gl. 27) erfüllt. Auf dem Wege über diese Lösungen, welche freilich physikalisch bedeutungslos sind, da sie unendlichen Druck im Mittelpunkt ergeben, kann man zu dem Grenzfall einer auf einen Punkt konzentrierten Masse übergehen und findet dann auch die Relation  $\rho = \alpha^3$  wieder, welche nach der früheren Untersuchung für den Massenpunkt gilt. Es sei hier noch bemerkt, daß man von einem Massenpunkt nur reden kann, insofern man die Variable  $r$  benutzt, welche sonst auffälligerweise für die Geometrie und Bewegung innerhalb unsres Gravitationsfeldes keine Rolle spielt. Für einen außen messenden Beobachter folgt gemäß (40), daß eine Kugel von gegebener Gravitationsmasse  $\alpha^2 k^2$  keinen kleineren außen gemessenen Radius haben kann, als:

$$P_a = \alpha.$$

Für eine Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit wird die Grenze  $9/8\alpha$ . (Für die Sonne wird  $\alpha$  gleich 3 km, für eine Masse von 1 g gleich  $1.5 \cdot 10^{-28}$  cm.)

# Stabilitätsbetrachtungen: Neutronensterne

Fritz Zwicky 1930er/1940er: Neutronensterne als Erklärung für Supernovae (Zwicky und Walter Baade), Übergang vom Stern zum Neutronenstern – damals ziemlich wilde Idee!

Lew Landau 1938: Neutronenkern („Neutron core“) im Inneren von Sternen wie der Sonne, Energiefreisetzung, wenn sich immer mehr herkömmliche Atomkerne dem Neutronenkern anschließen

Robert Oppenheimer: Liest Landaus Artikel, beginnt eigene Rechnungen. Erst Minimalmasse, dann, in Anschluss an Zwicky, Stabilitätsfrage: Was passiert mit Sternen, die keine Weißen Zwerge werden?



## Weiter mit Stabilitätsbetrachtungen

Oppenheimer und Volkoff 1939: Kugelsymmetrie, Anschluss an Schwarzschild-Metrik, statisches Gleichgewicht und Einstein-Gleichungen:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \left[ \rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right] \left[ M(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}$$

im Vergleich mit klassischer Gleichung

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G}{r^2} \rho(r) M(r).$$

Druck trägt auf einmal auf der falschen Seite bei – destabilisierend!

# Stabilitätsbetrachtungen

Schwieriger: Was ist die Zustandsgleichung für den Druck?

Im Detail muss man dazu Kernkräfte verstehen: Schwierig!

Vereinfachte Rechnung: Erst Entartungsdruck, dann Korrektur für Kernkräfte.

Ergebnis: Irgendwo zwischen  $0.7$  und mehreren  $M_{\odot}$  gibt es eine obere Massengrenze für Neutronensterne – keine Stabilität mehr erreichbar!

# Einsteins Bedenken

Einstein 1939:

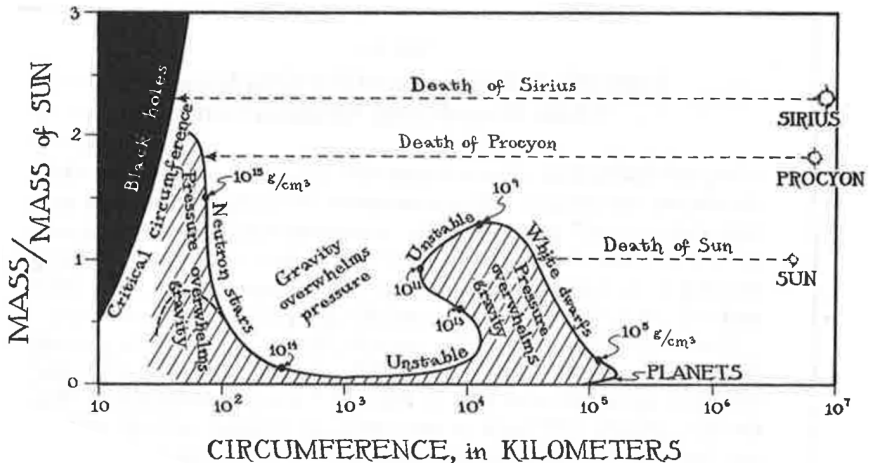
Schwarzschild hatte idealisiert gerechnet, Zustandsgleichungen sind schwierig: Kann man eine größere Masse aus frei bewegten Punktteilchen aufbauen? Einstein rechnet (auch vereinfacht!) und sagt: Nein. Kreisbahnen können nicht kleiner als  $3/2 \mathcal{R}$  werden, sonst wird die Lichtgeschwindigkeit überschritten.

The essential result of this investigation is a clear understanding as to why the “Schwarzschild singularities” do not exist in physical reality. Although the theory given here treats only clusters whose particles move along circular paths it does not seem to be subject to reasonable doubt that more general cases will have analogous results. The “Schwarzschild singularity” does not appear for the reason that matter cannot be concentrated arbitrarily. And this is due to the fact that otherwise the constituting particles would reach the velocity of light.

This investigation arose out of discussions the author conducted with Professor H. P. Robertson and with Drs. V. Bargmann and P. Bergmann on the mathematical and physical significance of the Schwarzschild singularity. The problem quite naturally leads to the question, answered by this paper in the negative, as to whether physical models are capable of exhibiting such a singularity.

# Stabilitätsrechnungen

Genauere Rechnungen (Harrison, Wheeler, Wakano, Thorne und andere 1950+):



Quelle: Abb. 5.5. in Kip Thorne, *Black Holes and Time Warps*, W.W. Norton 1994

# Literatur

Kip Thorne: *Black Holes and Time Warps*, W.W. Norton 1994

Edwin F. Taylor und John Archibald Wheeler: *Exploring Black Holes. Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman 2000