Relativitätstheorie(n)

Astronomie für Nicht-Physiker: Die Vermessung des Weltalls

Markus Pössel

Haus der Astronomie

16. Januar 2020

Beobachterperspektive

Letzte Vorlesung: Wir hatten *vorausgesetzt*, dass Orte und Zeitpunkte bestimmt werden können, und gesehen, wie Ereignisse, Weltlinien etc. in **Raumzeitdiagrammen** grafisch dargestellt werden können.

Diese Vorlesung: Ein Schritt zurück.

Wie bestimmt man eigentlich Orte und Zeitpunkte?

(Raumzeitdiagramme müssen wir uns in dem Zusammenhang erst einmal wieder erarbeiten.)

Beobachterperspektive

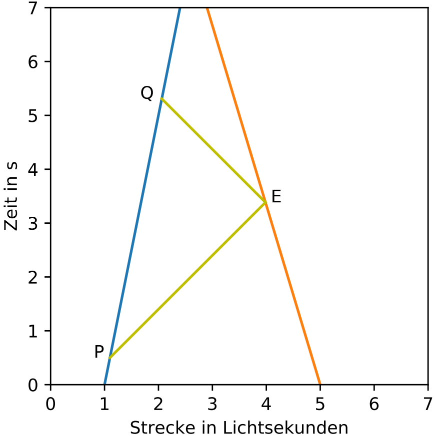
Wir haben in der vorigen Vorlesung gelernt, dass es nicht so einfach ist,

Gleichzeitigkeit zu definieren

und darauf aufbauend

Positionen im Raum zu bestimmen,

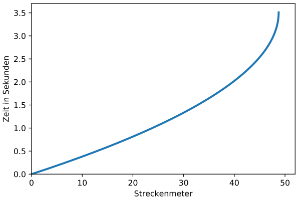
sprich: das **Anderswo** zu vermessen

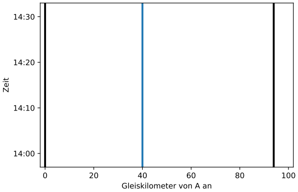


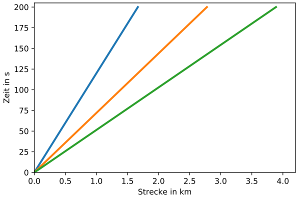
Beobachterperspektive

Wir vergessen alle Eigenschaften der Raumzeitdiagramme, die bereits eine physikalische Bedeutung der Koordinaten voraussetzen, und beginnen noch einmal ganz von vorne.

Strategie an diesem Punkt: **lokal beginnen, global(er) ausweiten**







Uhren

Ohne herkömmliche Konzepte von Abstand und Gleichzeitigkeit:
Was können wir lokal messen?

Erstens: **idealisierte (lokale) Uhren**

Uhr:

- Taktgeber (periodischer Prozess)
- Zählwerk

Worin sich Uhren unterscheiden können 1/2

1. Gleichmäßigkeit — Anzeige der einen Uhr bei lokalem Vergleich um konstanten Wert verschoben

Tick
Tick
Tick
Tick
Tick
Tick
Tick
Tick

2. Gang — Unterschiedliche “Tickrate”. Konstante Gangverhältnisse können durch Korrekturfaktor berücksichtigt werden

(z.B. Pendeluhr 1 Hz vs. Atomuhr 9 GHz)

Pendeluhr im Physikzentrum Bad Honnef

Atomuhr CS 4, PTB Braunschweig. Bild: Benutzer Brunswyk via Wikimedia Commons unter Lizenz CC BY-SA 3.0 DE

Worin sich Uhren unterscheiden können 2/2

3. Stand — Anzeige der einen Uhr bei lokalem Vergleich um konstanten Wert verschoben

Beispiel: Zeitzonen. Bild US Central Intelligence Agency via Wikimedia Commons, Public Domain

Welche der Unterschiede kann man ausgleichen, welche nicht?

Einflüsse auf Uhren

Die Uhren, die wir betrachten, können allen möglichen äußeren Einwirkungen ausgesetzt sein:

- starken Temperaturen
- Beschleunigungen
- Magnetfeldern
- …

Je nach Funktionsmechanismus — Atomuhr, Quartzuhr, mechanische Uhr — wird der Gang dabei unterschiedlich beeinflusst.

Aber: Was am Ort der Uhr *nachweisbar* ist (Magnetfeld, Beschleunigung, Temperatur, . . .) kann im Prinzip *ausgeglichen* werden.

z.B.: Vergleich von unterschiedlichen Arten von Uhren, bei Beschleunigung u.a. unterschiedliche Orientierung, Abschirmung, nachgeschalteter Rechner der systematisch

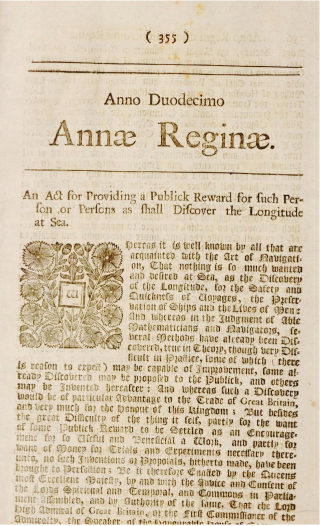
Historisch: John Harrisons seetaugliche Uhren

Historisches Beispiel für Einfluss-Ausgleich: John Harrisons Uhren zur Längengrad-Bestimmung:

- Grashüpfer-Hemmung
- Kreisförmige Unruh (gegen Schlingern)
- Bimetall-Korrektoren für Temperaturausgleich

[Buch: Dava Sobel, *Longitude* (dt. Längengrad)]

$\Rightarrow$ unsere idealisierten Uhren sollen Ausgleichsmechanismen ähnlicher Art für alle lokal nachweisbaren Einflüsse aufweisen



(355)

Anno Duodecimo

Annæ Reginæ.

An Act for Providing a Publick Reward for ſuch Perſon or Perſons as ſhall Diſcover the Longitude at Sea.

Whereas it is well known by all that are acquainted with the Art of Navigation, That nothing is ſo much wanted and deſired at Sea, as the Diſcovery of the Longitude, for the Safety and Quickneſs of Voyages, the Preſervation of Ships and the Lives of Men: And whereas in the Judgment of Able Mathematicians and Navigators, ſeveral Methods have already been Diſcovered, true in Theory, though very Difficult in Practice, ſome of which (there is reaſon to expect) may be capable of Improvement, ſome already Diſcovered may be propoſed to the Publick, and others may be Invented hereafter: And whereas ſuch a Diſcovery would be of particular Advantage to the Trade of Great Britain, and very much for the Honour of this Kingdom; But beſides the great Difficulty of the thing it ſelf, partly for the want of ſome Publick Reward to be Settled as an Encouragement for ſo Uſeful and Beneficial a Work, and partly for want of Money for Trials and Experiments neceſſary thereunto, no ſuch Inventions or Propoſals, hitherto made, have been brought to Perfection; Be it therefore Enacted by the Queens moſt Excellent Majeſty, by and with the Advice and Conſent of the Lords Spiritual and Temporal, and Commons in Parliament Aſſembled, and by Authority of the ſame, That the Lord High Admiral of Great Britain, or the Firſt Commiſſioner of the Admiralty, the Speaker of the Honourable Houſe of Com[illegible]

via Cambridge University Digital Library

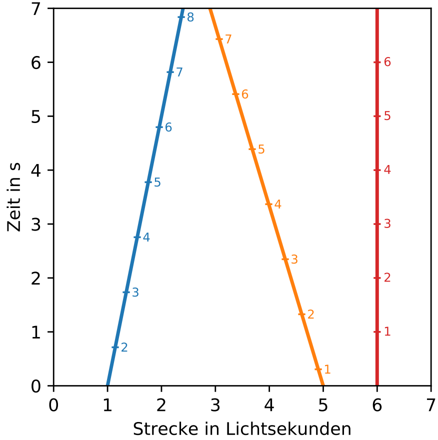
Ideale Uhren

Bausteine unseres Raumzeit-Modells: **ideale Uhren** unterschiedlicher Bauart, bei denen jeweils alle lokal messbaren Einflüsse kompensiert wurden

Auf gleicher Weltlinie zeigen solche Uhren gleiche Zeitintervalle an (kein Gleichmäßigkeits-Unterschied):

Eigenzeit der Weltlinie

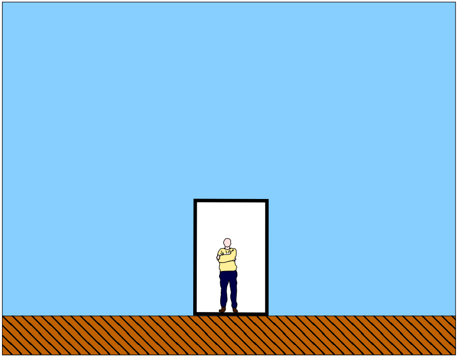
Durch Rundwege-Transport ändert sich Stand (1. Uhreneffekt), aber nicht Gang (2. Uhreneffekt)

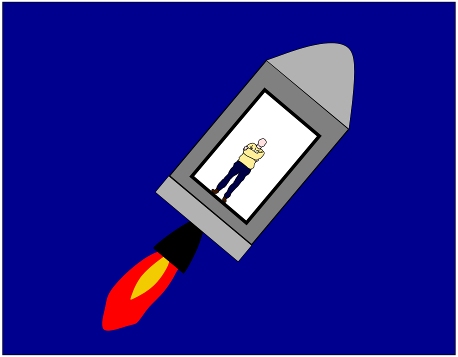


Teilchen-Weltlinien

Eine Eigenschaft, die man lokal messen kann: **Beschleunigung**

Eine Spielart von **Einsteins Äquivalenzprinzip**: Lokal (z.B. in geschlossener Kabine) sind mit 1 g beschleunigte Kabine und auf dem Erdboden ruhende Kabine ununterscheidbar



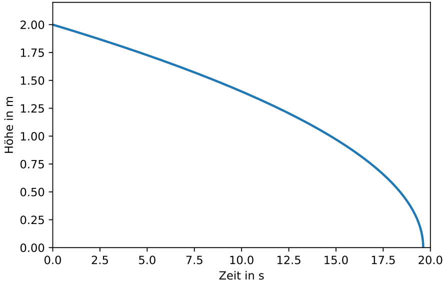


Teilchen-Weltlinien

Wir unterscheiden daher im folgenden **lokal beschleunigte** und **lokal unbeschleunigte Weltlinien** — jeweils beurteilt nach den lokalen Messungen der “Weltlinienbewohner”

Vorsicht: Das ist nicht notwendigerweise dasselbe wie “im Raumzeitdiagramm beschleunigte” (=gekrümmte) Weltlinien

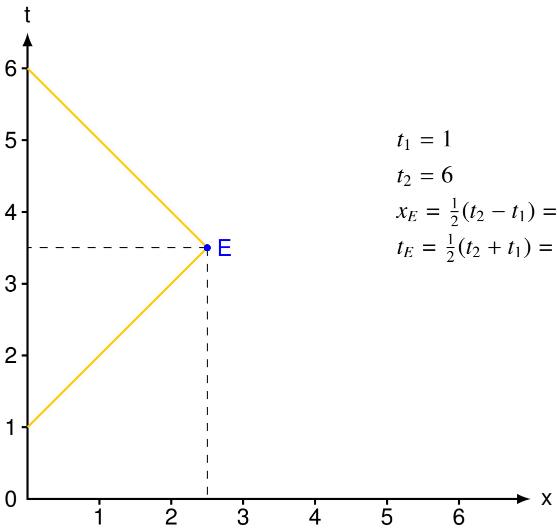
Gegenbeispiel: Freier Fall im Newtonschen Koordinatensystem



Radarkoordinaten

1. Wähle eigenen Ort als Raumkoordinaten-Nullpunkt $x = 0$: Bezugs-Weltlinie
2. Definiere Zeitkoordinate am Nullpunkt als Weltlinien-Eigenzeit
3. Für jedes Ereignis, betrachte Licht-Weltlinien von Bezugs-Weltlinie zum Ereignis und zurück — ausgesandt zur Zeit τ_1, wieder aufgefangen bei τ_2
4. Licht-Weltlinien-Definitionen müssen nicht praktisch durchführbar sein (z.B. Hindernisse)
5. Bestimme Abstände zu allen anderen Ereignissen über die Radar-Echozeit: Wenn Licht hin und zurück τ_E braucht, $x = c/2 \cdot (\tau_2 - \tau_1)$
6. Bestimme Zeitkoordinate von anderen Ereignisse über Einsteins Gleichzeitigkeitsdefinition zu $t = 1/2 \cdot (\tau_2 + \tau_1)$

Radarkoordinaten-Raumzeitdiagramm



$t_1 = 1$

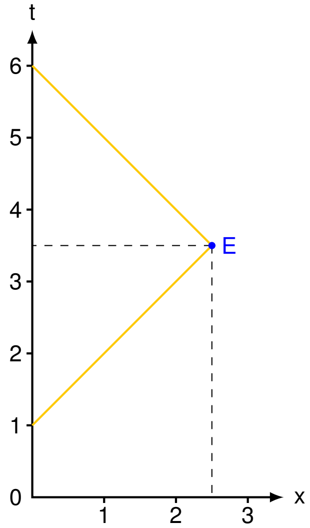
$t_2 = 6$

$x_E = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) = 2.5$

$t_E = \frac{1}{2}(t_2 + t_1) = 3.5$

Spezielle Relativitätstheorie: Grundannahmen

- Wir betrachten erst einmal nur **unbeschleunigte Beobachter**
- Wir nehmen an, dass die unbeschleunigte Weltlinien in unseren Radarkoordinaten-Raumzeitdiagrammen Raumzeitgeraden entsprechen
- **Relativitätsprinzip**: Wir nehmen an, dass die physikalischen Gesetze keinen der unbeschleunigten Beobachter vor den anderen auszeichnen



Grundannahmen: Inertialsysteme

unbeschleunigte Beobachter in der klassischen Mechanik: Freie Teilchen folgen gerade Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit. (Beschleunigte Beobachter: Trägheitskräfte.) $\Rightarrow$ **Inertialsysteme**

Unbeschleunigte Weltlinien = Raumzeitgeraden in Radarkoordinaten: Raum- und Zeitdokumentation durch Radarkoordinaten entsprechen Raum und Zeit in der klassischen Mechanik
(äquivalent zur "Konstanz der Lichtgeschwindigkeit")

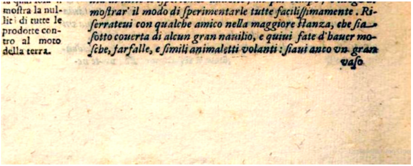
Grundannahme: Relativitätsprinzip

Galilei 1632, Dialogo:

Es gibt keine lokalen Anzeichen für gleichförmige Bewegung

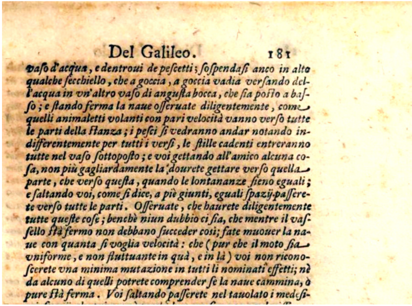
Modernes Äquivalent: in ICE oder Flugzeug gelten (bis auf Ruckeln) dieselben Naturgesetze wie im “Stillstand”

Wir weiten dieses **Relativitätsprinzip** aus auf Lichtausbreitung, Uhrengang



mostra la nullità di tutte le prodotte contro al moto della terra.

mostrar' il modo di sperimentarle tutte facilissimamente. Riserrateui con qualche amico nella maggiore stanza, che sia sotto couerta di alcun gran nauilio, e quiui fate d'hauer mosche, farfalle, e simili animaletti volanti: siaui anco un gran vaso

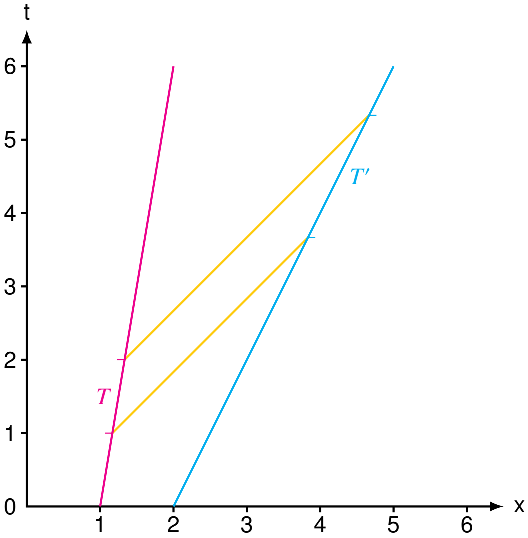


Del Galileo. 181

vaso d'acqua, e dentroui de pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia, a goccia vadia versando dell'acqua in vn'altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso; e stando ferma la naue osseruate diligentemente, come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi, le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dourete gettare verso quella parte, che verso questa, quando le lontananze sieno eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazij passerete verso tutte le parti. Osseruate, che hauerete diligentemente tutte queste cose; benchè niun dubbio ci sia, che mentre il vassello stà fermo non debbano succeder così; fate muouer la naue con quanta si voglia velocità: che (pur che il moto sia uniforme, e non fluttuante in quà, e in là) voi non riconoscerete vna minima mutazione in tutti li nominati effetti; nè da alcuno di quelli potrete comprender se la naue cammina, ò pure stà ferma. Voi saltando passerete nel tauolato i medesi-

Galilei, Dialogo S. 180–181, via Google Books

Eigenzeiten und k-Faktor



Einfachste Messung: Eigenzeiten mit Hilfe von Lichtsignalen vergleichen

Wie hängen T und T' zusammen?

Ergebnis: $T' = k(v)T$

mit v der Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter

Ursprünglich: Bondi, *Relativity and Common Sense* (1964). Genauer nachlesbar in: Ellis & Williams, *Flat and curved spacetimes* (2000)

Eigenzeiten und k-Faktor

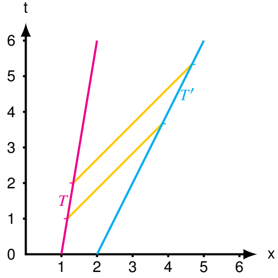
Darf *nicht* abhängen von:

1. Aussendungsort
2. Aussendezeitpunkt

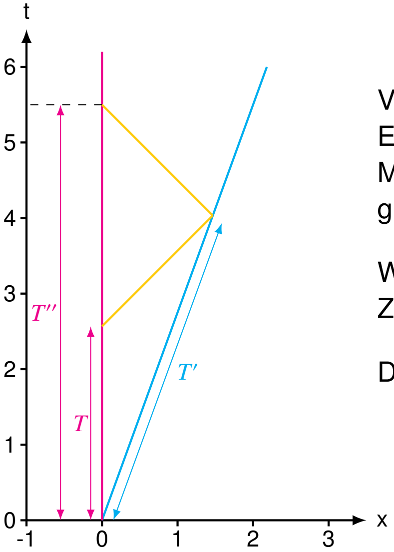
Proportionalität folgt aus gleichmäßiger Unterteilung

Relativgeschwindigkeit v muss für beide Beobachter gleich sein (Beweis durch symmetrische Mittel-Weltlinie)

Funktionale Abhängigkeit von v muss für alle Inertialbeobachter dieselbe sein (Relativitätsprinzip)



Berechnung k-Faktor



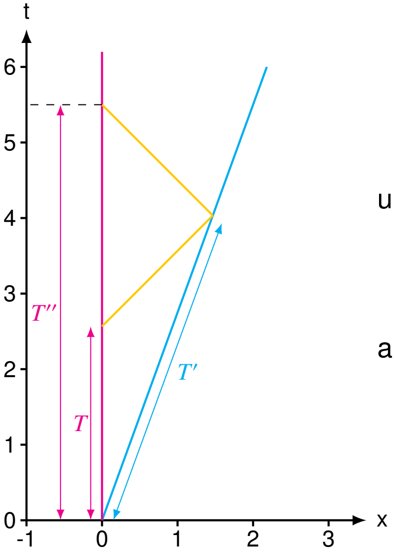
Vereinfachte Rechnung: Bestimme $k(v)$ im Eigensystem eines der Beobachter, nutze Moment zu dem sich die Beobachter am gleichen Ort befinden

Wähle den Zusammentreff-Moment als Zeitnullpunkt

Dann gilt:

$$T' = k(v) \cdot T \quad \text{und} \quad T'' = k(v) \cdot T'$$

Berechnung k-Faktor



$$T' = k(v) \cdot T \quad \text{und} \quad T'' = k(v) \cdot T'$$

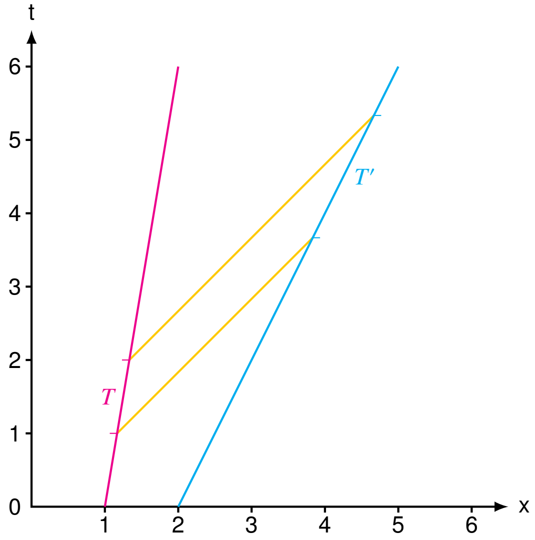
und andererseits

$$T'' = \frac{c+v}{c-v} \cdot T,$$

also

$$k(v) = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Radialer Dopplereffekt



Erster Beobachter misst Periode T, zweiter Beobachter T',

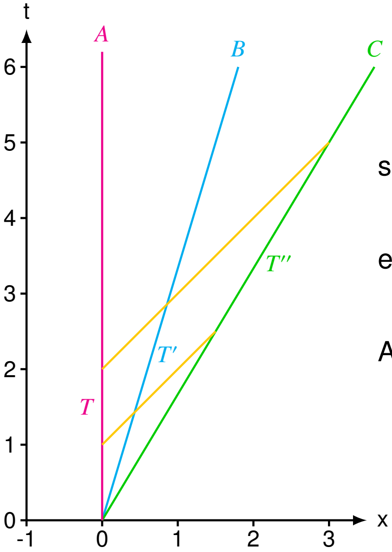
$$\lambda = cT \quad \text{und} \quad \lambda' = cT'$$

also

$$\frac{\lambda'}{\lambda} \equiv 1 + z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Vorzeichen $v > 0$ bei Bewegung voneinander weg, $v < 0$ aufeinander zu

Geschwindigkeitsaddition



$$T'' = k(v_{AC})T \quad \text{und} \quad T' = k(v_{AB})T$$

sowie

$$T'' = k(v_{BC})T'$$

ergibt

$$k(v_{AC}) = k(v_{BC}) \cdot k(v_{AB}).$$

Aufgelöst nach Geschwindigkeiten:

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

Geschwindigkeitsaddition

Eigenschaften der Geschwindigkeitsaddition

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

— für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise klassisch,

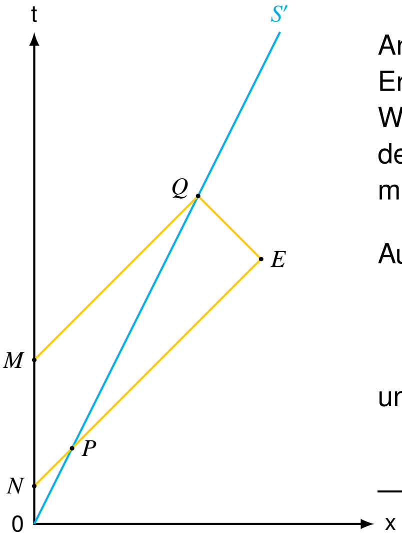
$$\frac{1}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2} \approx 1 - v_{AB}v_{BC}/c^2 \approx 1$$

Durch Addition von unterlichtschnellen Geschwindigkeiten keine Überlichtgeschwindigkeit erreichbar, z.B. $v_{AB} = 0.6c, v_{BC} = 0.6c \Rightarrow$

$$v_{AC} = \frac{0.6 + 0.6}{1 + 0.36}c \approx 0.88c < 1.$$

Anzeichen dafür: Lichtgeschwindigkeit c ist Grenzgeschwindigkeit!

Lorentz-Transformationen



Angenommen, in unserem System habe Ereignis E die Koordinaten $t(E), x(E)$. Welche Koordinaten $t'(E), x'(E)$ hat es für den Beobachter S', der sich relativ zu uns mit v bewegt?

Ausnutzen:

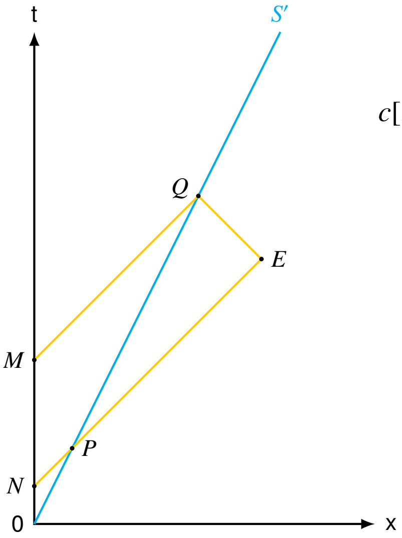
$$t'(Q) - t'(P) = k(v)[t(M) - t(N)]$$

und

$$t'(P) = k(v) \cdot t(N)$$

— daraus S'-Radarkoordinaten berechnen!

Lorentz-Transformationen



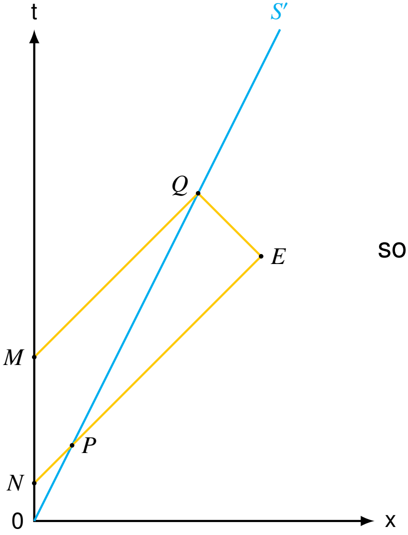
$$c[t(E) - t(N)] = x(E) \quad \Rightarrow \quad t(N) = t(E) - x(E)/c$$

$$t(Q) = [x(E) + ct(E)]/(c + v)$$

$$t(M) = t(Q) - x(Q)/c = t(Q)[1 - v/c]$$

$$\Rightarrow \quad t(M) = [t(E) + x(E)/c] \cdot \frac{c - v}{c + v}$$

Lorentz-Transformationen



$$t'(Q) = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}[t(E)+x(E)/c]$$

$$t'(P) = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}[t(E)-x(E)/c]$$

so dass

$$t'(E) = \frac{t(E)-vx(E)/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$x'(E) = \frac{x(E)-vt(E)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Spezielle Relativitätstheorie

Diese und weitere Überlegungen führen auf:

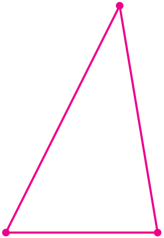
- **Relativität der Gleichzeitigkeit** — über die zeitliche Reihenfolge bestimmter Ereignisse kommen wir und S' zu unterschiedlichen Ergebnissen
- **Zeitdilatation** — sind erst P und später Q Ereignisse auf der Weltlinie einer in S' ruhenden Uhr, gilt $t'(Q) - t'(P) < t(Q) - t(P)$
- **Längenkontraktion** — ein Objekt, das in S' ruht, hat in Bewegungsrichtung in S' eine größere Ausdehnung als in unserem eigenen System (bestimmt via x-Koordinaten-Differenz)
- **Massenzunahme** — mit zunehmender Geschwindigkeit wird es immer aufwändiger, ein Objekt noch weiter zu beschleunigen
- **Lichtgeschwindigkeit als Grenzgeschwindigkeit** — kein Informations-/Energietransport kann Licht überholen

Koordinaten und Invarianz

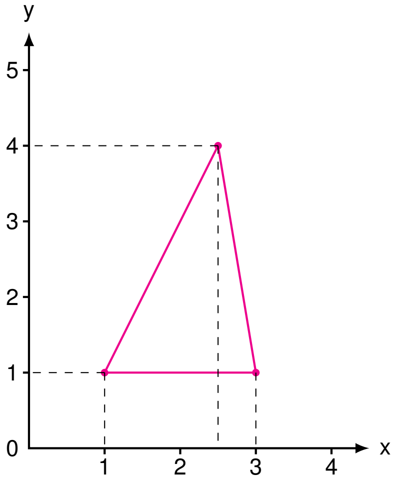
Wir haben mit den Radarkoordinaten ein bestimmtes Koordinatensystem eingeführt.

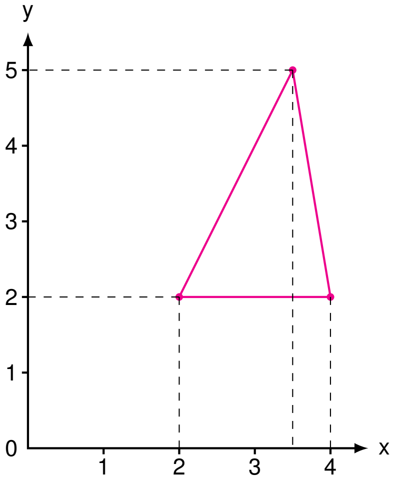
Koordinaten enthalten üblicherweise ein Element der Willkür

Beispiel: Geometrische Figur (Dreieck) in unterschiedlichem x-y-System

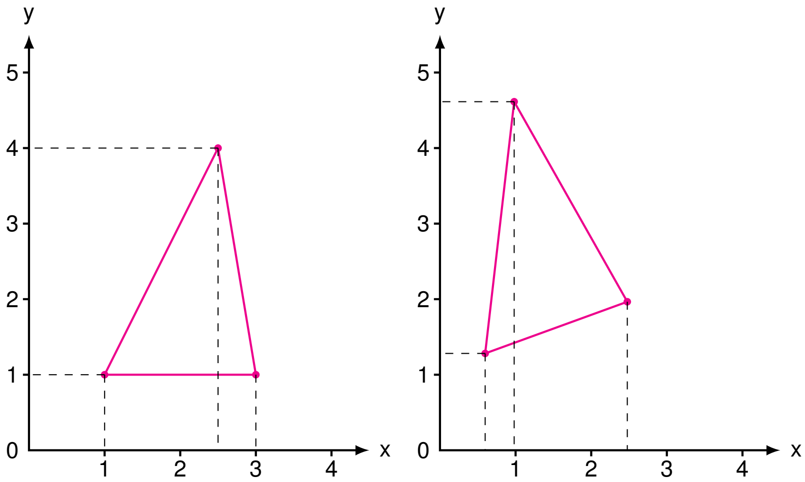


Verschobene Koordinatensysteme





Rotierte Koordinatensysteme



Invariant gegen Koordinatensystem-Wechsel: Längen

Für zwei Punkte mit Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2): Länge

$$d \equiv \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ist invariant gegenüber Verschiebungen (Translationen)
und Rotationen des Koordinatensystems.

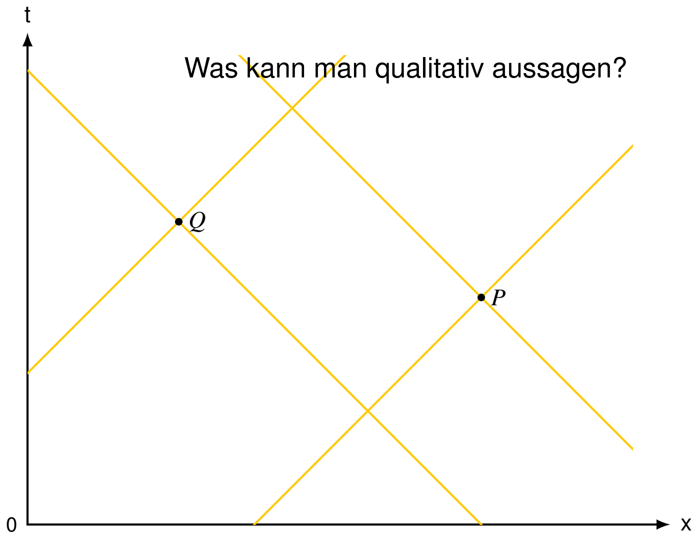
(Für Translation auch rechnerisch direkt einsehbar.)

Wie kann eine entsprechende invariante Größe bei Raumzeit-Koordinatensystemen aussehen?

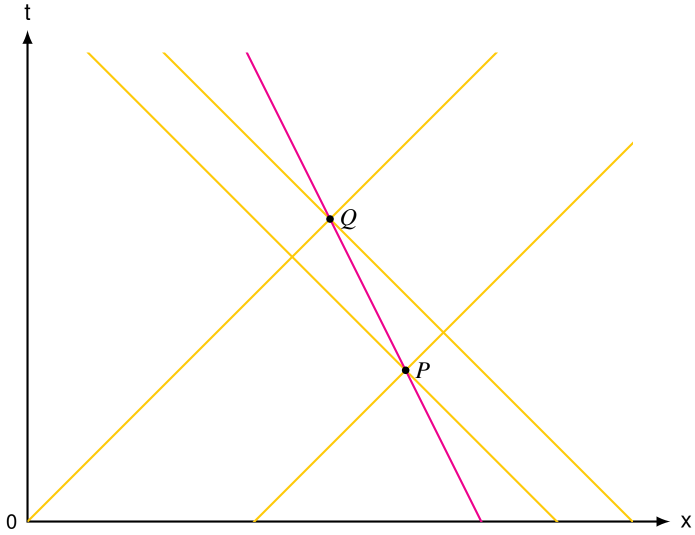
Anders formuliert: **Was an einer Raumzeit-Situation ist physikalisch?**

Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an Robert Geroch, *Relativity from A to B* (1978)

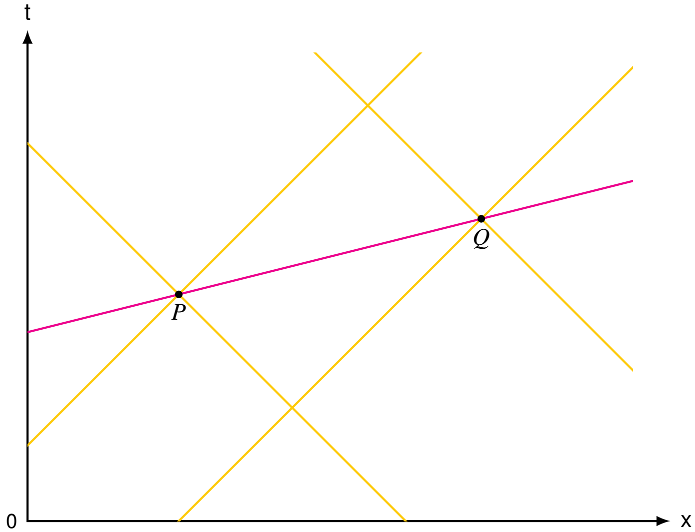
Lichtbahnen-Struktur nutzen



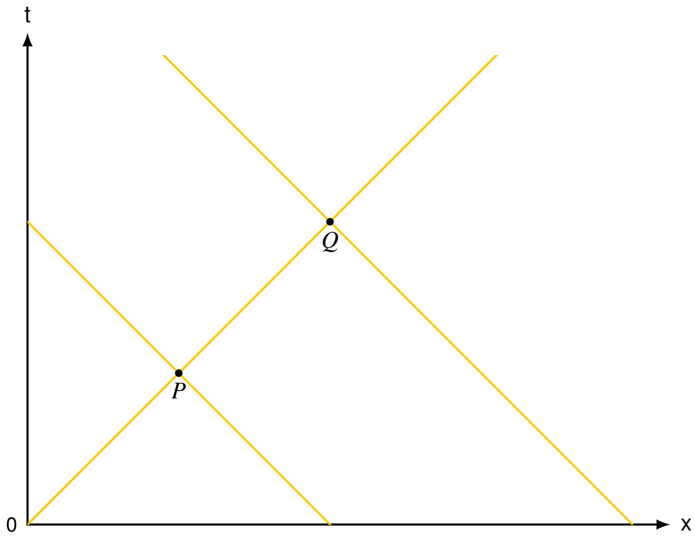
Fallunterscheidung: zeitartiger Abstand



Fallunterscheidung: raumartiger Abstand

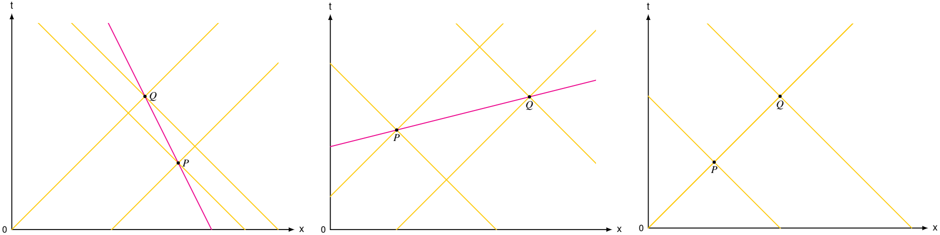


Fallunterscheidung: lichtartiger Abstand



Fallunterscheidung

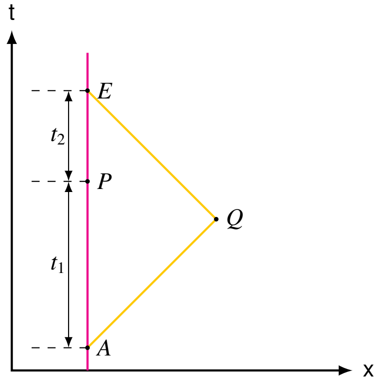
Das sind die *qualitativen* Fallunterscheidungen
für die Beziehung zwischen Ereignissen P und Q:



zeitartig **raumartig** **lichtartig**

Können wir auch ein *quantitatives* Maß für die Abstandsarten finden?

Ansatz für “Abstand”



Charakterisiere “Abstand”

von Ereignissen P und Q

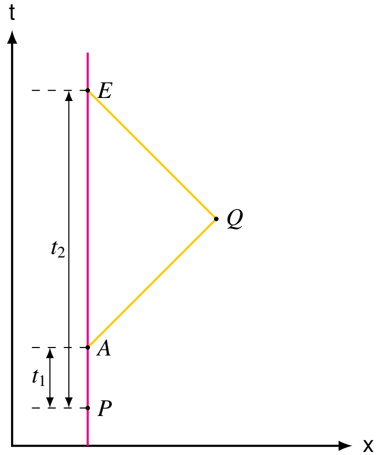
durch $t_1 \equiv t(P) - t(A)$

und $t_2 \equiv t(E) - t(P)$

Später noch zu klären:

- ist das überhaupt symmetrisch?
- ist das überhaupt koordinatenunabhängig?

Fall 1: Reihenfolge P, A, E

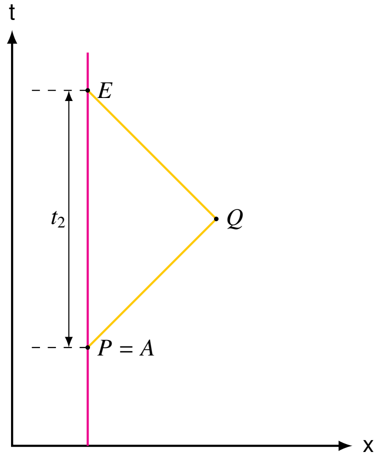


P und Q sind **zeitartig** zueinander

$$t_1 \equiv t(P) - t(A) < 0$$

$$t_2 \equiv t(E) - t(P) > 0$$

Fall 2: Reihenfolge $P = A$, E

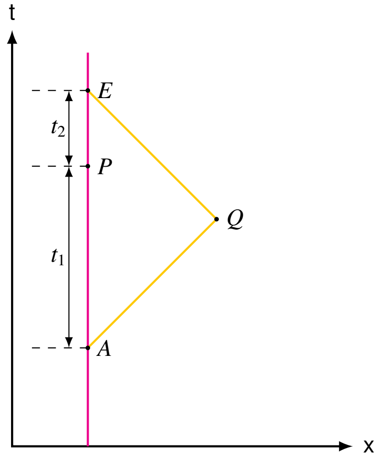


P und Q sind **lichtartig** zueinander

$$t_1 \equiv t(P) - t(A) = 0$$

$$t_2 \equiv t(E) - t(P) > 0$$

Fall 3: Reihenfolge A, P, E

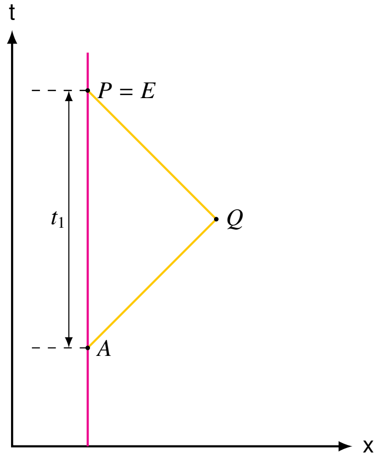


P und Q sind **raumartig** zueinander

$$t_1 \equiv t(P) - t(A) > 0$$

$$t_2 \equiv t(E) - t(P) > 0$$

Fall 4: Reihenfolge A, $P = E$

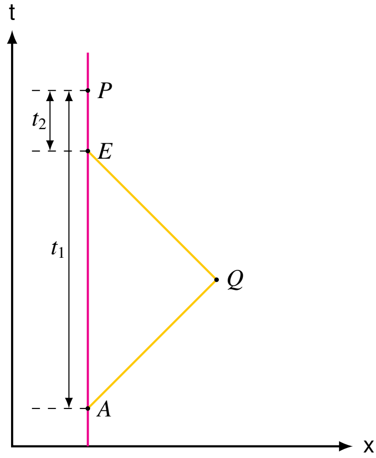


P und Q sind **lichtartig** zueinander

$$t_1 \equiv t(P) - t(A) > 0$$

$$t_2 \equiv t(E) - t(P) = 0$$

Fall 5: Reihenfolge A, E, P



P und Q sind **zeitartig** zueinander

$$t_1 \equiv t(P) - t(A) > 0$$

$$t_2 \equiv t(E) - t(P) < 0$$

Fallunterscheidung

Reihenfolge	t_1	t_2	Relation P und Q
P, A, E	< 0	> 0	zeitartig
$P = A, E$	$= 0$	> 0	lichtartig
A, P, E	> 0	> 0	raumartig
$A, P = E$	> 0	$= 0$	lichtartig
A, E, P	> 0	< 0	zeitartig

Welches **Linienelement**, welche algebraische Kombination von t_1, t_2 spiegelt die **kausale Struktur** (raumartig, zeitartig, lichtartig) wieder?

Ansatz für Linienelement

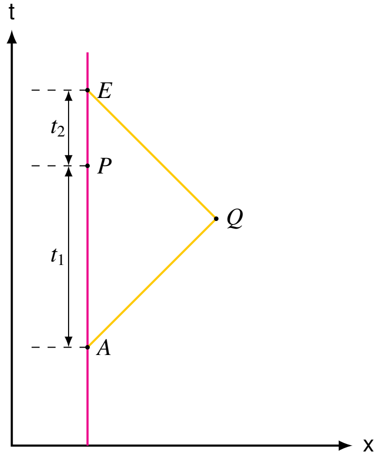
Ansatz:

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \cdot t_1 \cdot t_2$$

(Faktor c^2 und Schreibweise mit Quadrat bei Δs^2 ist reine Konvention)

Reihenfolge	t_1	t_2	Relation P und Q	Δs
P, A, E	< 0	> 0	zeitartig	< 0
$P = A, E$	$= 0$	> 0	lichtartig	$= 0$
A, P, E	> 0	> 0	raumartig	> 0
$A, P = E$	> 0	$= 0$	lichtartig	$= 0$
A, E, P	> 0	< 0	zeitartig	< 0

Linienelement und Radarkoordinaten



In Radarkoordinaten des Beobachters auf der Weltlinie von P:

$$x(Q) = x(P) + c/2 \cdot (t_2 + t_1)$$

$$t(Q) = t(A) + (t_1 + t_2)/2$$

$$= t(P) + (t_2 - t_1)/2$$

$$t_2 = [x(Q) - x(P)]/c + [t(Q) - t(P)]$$

$$t_1 = [x(Q) - x(P)]/c - [t(Q) - t(P)]$$

so dass

$$c^2 t_1 t_2 = [x(Q) - x(P)]^2 - c^2[t(Q) - t(P)]^2$$

Linienelement

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

Bedeutung dieser Kombination?
Einige Spezialfälle:

Für zwei Ereignisse am gleichen Ort x: $\Delta\tau \equiv \sqrt{-\Delta s^2/c^2}$ ist die (Eigen-)Zeit zwischen den Ereignissen

Für zwei Ereignisse zur gleichen Zeit t: $\sqrt{\Delta s^2}$ ist der Abstand in x-Richtung

Für zwei Ereignisse auf einer Licht-Weltlinie:
$\Delta s^2 = [\Delta x - c\Delta t] \cdot [\Delta x + c\Delta t] = 0$.

Koordinaten-Unabhängigkeit und Symmetrie

Lorentz-Transformation:

$$t'(E) = \frac{t(E) - vx(E)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x'(E) = \frac{x(E) - vt(E)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Daraus lässt sich direkt ableiten:

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

— das Linienelement ist ein **(Lorentz-)invariantes Objekt**!

Δx und Δt sind invariant gegenüber verschiebungen des Koordinatennullpunkts — daraus folgt **Symmetrie**, $\Delta s^2(P, Q) = \Delta s^2(Q, P)$.

Nächste Schritte

- Fallenlassen der Zusatzannahmen (Inertialbeobachter, Homogenität)
- Notwendigkeit von Nicht-Radarkoordinaten-Systemen
- Allgemeines Linienelement
- Anwendungen der so erhaltenen Raumzeiten:
  - Schwarzes Loch
  - expandierender Kosmos