Grundlegende Rechnungen zu Struktur, Form und Gleichgewicht von Planeten

Markus Pössel

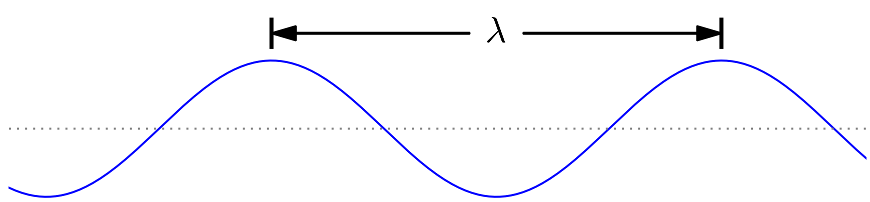
Handout zur Vorlesung „Das Sonnensystem und seine entfernten Verwandten für Nichtphysiker“ am 28.11.2022

1 Quantenteilchen

Die folgende Darstellung orientiert sich weitgehend an Victor Weisskopf, „Of Atoms, Mountains and Stars“ in Science 187 (1975), 605– 612].

Für Quantenteilchen (Elektronen, Protonen, …) gilt wie für Licht: Quantenteilchen sind sowohl Welle als auch Teilchen. Wie beim Licht (siehe die zweite Vorlesung) werden Quantenteilchen als Teilchen nachgewiesen, aber ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit werden durch eine Wellenfunktion bestimmt.

Freie Teilchen entsprechen dabei einfachen Sinuswellen, mit konstanter Wellenlänge wie hier eingezeichnet:



Genau wie bei Licht hängen auch bei Quantenteilchen Energie E und Frequenz ν miteinander zusammen:

$$E = h\nu. \tag{1}$$

Auch Impuls p des entsprechenden Teilchens und Wellenlänge λ der entsprechenden Welle hängen zusammen, und zwar als

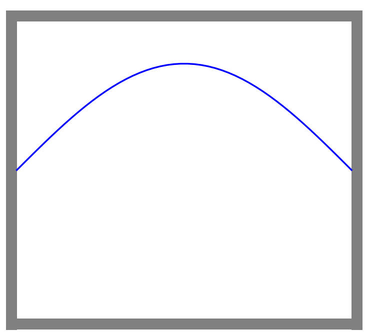
$$p = \frac{h}{\lambda}. \tag{2}$$

2 Lokalisierte Teilchen

Die Wellennatur und deren Zusammenhang mit Impuls bzw. Energie hat Konsequenzen für die Eigenschaften lokalisierter bzw. eingeschlossener Teilchen – astronomisch relevantes Beispiel: Teilchen, die durch ihre gegenseitige Gravitationsanziehung auf einen begrenzten Raum zusammengedrängt werden, etwa im Inneren von Sternen und Planeten.

Vereinfacht argumentieren wir hier mit einem Teilchen, das in einen Kasten eingeschlossen ist. Für eine genauere Behandlung müsste man die Begriffe der potentiellen Energie und des Potentialtopfes einführen und sich klarmachen, welchen Randbedingungen eine Welle in solch einer Situation erfüllen muss (insbes. Knoten an den Kastenwänden).

Wir behelfen uns mit der anschaulichen Vorstellung, dass die Welle, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein Teilchen beschreibt, als Welle in einen Kasten der Größe d passen muss. Die längste Welle, die man als Ganzes in solch einem Kasten unterbringt, hat gerade die Wellenlänge $\lambda_{max} = 2d$; so passt gerade ein Wellenbauch bzw. Wellental zwischen die Kastenwände und schwingt dort als stehende Welle, wie hier gezeigt:



Eine maximale mögliche Wellenlänge entspricht einem minimalen Impuls, den ein solches eingesperrtes Teilchen tragen muss – entsprechend der Gleichung (2) ist z.B. der minimale Impuls in x-Richtung eines in x-Richtung eingesperrten Teilchens

$$p_{min,x} = \frac{h}{\lambda_{max}} = \frac{h}{2d} \tag{3}$$

und entsprechend in y- und z-Richtung. Mit der in der klassischen Mechanik (nicht-relativistich) gültigen Beziehung zwischen Impuls und kinetischer Energie,

$$E_{kin,min} = \frac{1}{2}mv_{min}^2 = \frac{p_{min}^2}{2m}, \tag{4}$$

hat ein eingesperrtes Teilchen die Minimal-Bewegungsenergie

$$E_{kin,min} = \frac{p_{min,x}^2 + p_{min,y}^2 + p_{min,z}^2}{2m} = \frac{3}{8} \cdot \frac{h^2}{md^2}. \tag{5}$$

Die numerischen Vorfaktoren darf man bei solchen Rechnungen nicht allzu ernst nehmen. Die können sich bei genauerer Behandlung durchaus ändern. Je nachdem in wie hoher Potenz die betreffenden Faktoren vorkommen, kann sich dabei auch durchaus die Größenordnung um ein bis zwei Größenordnungen oder noch mehr ändern. Es gibt damit drei Stufen der Zuverlässigkeit solcher Rechnungen: Auf die genauen Vorfaktoren sollte man sich gar nicht verlassen. Bei den Größenordnungen sollte man mit Abweichungen zumindest rechnen. Die funktionalen Zusammenhänge dagegen, also z.B. welche physikalischen Größen dort mit welcher Potenz, in welcher Kombination vorkommen, sollte eine vereinfachte Rechnung näherungsweise (insbesondere: bis auf kleine Zusatzterme, die addiert werden) richtig wiedergeben.

In unserem Fall heißt das: Der prinzipielle Zusammenhang

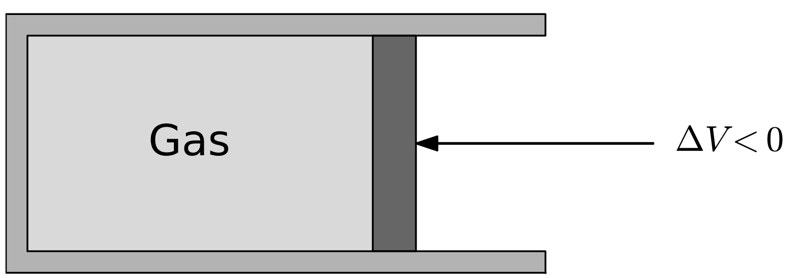
$$E_{kin,min} \sim \frac{h^2}{md^2} \tag{6}$$

dürfte auch in einer genaueren Rechnung erhalten bleiben.

3 Von der Energie zum Druck

Wer ein unter Druck stehendes Gas noch weiter komprimieren will, muss dafür Arbeit aufwenden. Mit anderen Worten: eine Volumenverkleinerung $\Delta V < 0$ gegen den Druck p führt dazu, dass man eine Energie ΔE aufwenden muss. Um diese Energiedifferenz wächst die innere Energie des betreffenden Gases. Dabei gilt

$$\Delta E = -p \cdot \Delta V \quad \Rightarrow p = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V}. \tag{7}$$



Andererseits hatten wir in Gl. (6) gesehen, wie die Energie eines Quantenteilchens im Kasten von der Seitenlänge d des Kastens abhängt. Bei einem würfelförmigen Kasten ist $V = d^3$ bzw. $d = V^{1/3}$, also

$$E_{kin,min} \sim \frac{h^2}{md^2} = \frac{h^2}{mV^{2/3}}. \tag{8}$$

Damit können wir die Ableitung von E nach V, also den Druck, direkt ausrechnen, nämlich zu

$$p = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{2}{3}\frac{h^2}{mV^{5/3}} \sim \frac{h^2}{md^5}. \tag{9}$$

Diesen Druck haben eingesperrte Teilchen alleine aufgrund ihrer Quanteneigenschaften, ihrer Wellennatur.

4 Pauli-Prinzip und Mehrteilchensysteme

Das *Pauli-Prinzip* besagt, dass sich nie zwei Materieteilchen in dem gleichen Quantenzustand befinden können.[1]

Das Pauli-Prinzip ist unter anderem für die Schalenstruktur der Atome verantwortlich. Sie entsteht, weil sich die Elektronen eben nicht alle im energieärmsten Zustand nahe am Atomkern versammeln können, sondern stattdessen nach und nach alle möglichen Zustände auffüllen, auch die mit höherer Energie als der Grundzustand.

Wir ersetzen die exakte Rechnung durch die Vorstellung, dass N identische Quantenteilchen, zum Beispiel N Elektronen, die in ein Volumen eingesperrt sind, sich so verhalten, als stünde jedem der Elektronen das „private Volumen“ $v = V/N$ zur Verfügung.[2]

Der Druck aufgrund der Quantennatur, im Zusammenhang mit den privaten Volumina von Materieteilchen auch *Entartungsdruck* genannt, ist, wenn wir $d = v^{1/3}$ in Formel (9) einsetzen und numerische Vorfaktoren einmal mehr vernachlässigen,

$$p_E \sim \frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{10}$$

Zum Vergleich: eine exakte Rechnung ergibt für den Fall von Elektronen

$$p_E = \frac{3^{2/3}}{20\,\pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \approx 0.05\,\frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}. \tag{11}$$

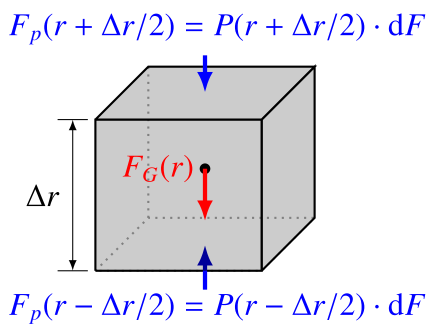
Unsere Abschätzung ergibt also bis auf einen Faktor von rund 20 das richtige Ergebnis, und sie ergibt den richtigen Funktionalzusammenhang zwischen p_E, N, V, h und m.

5 Gravitation und Gegendruck

Wie in der Vorlesung beschrieben, betrachten wir einen kleinen Ausschnitt eines kugelsymmetrischen Körpers: ein kleines Volumen, hier im Querschnitt dargestellt:

[1] Konkret gilt dies für alle Quantenteilchen mit halbzahligem Spin, sogenannte Fermionen. Dazu gehören alle Elementarteilchen der Materie, also Elektronen, Quarks, Neutrinos und so weiter.

[2] Mit dem Wissen, dass Elektronen noch einen zusätzlichen Freiheitsgrad haben, der ihren Zustand definiert, nämlich die Orientierung ihres Eigendrehimpulses (Spin) relativ zu einer gegebenen Bezugsrichtung, könnte man hier argumentieren, dass $v = 2V/N$, weil sich je zwei Elektronen eines dieser privaten Volumina teilen können. Da wir numerische Vorfaktoren bei unseren Überschlagsrechnungen sowieso nicht so ernst nehmen, sondern vor allem an den funktionalen Zusammenhängen der physikalischen Größen interessiert sind, vernachlässigen wir diese Komplikation an dieser Stelle.



Wie besagt, dies hier ist der Querschnitt – oberes und unteres Ende sollen jeweils eine Fläche ΔF besitzen, so dass die kleine Region insgesamt ein Volumen $\Delta V = \Delta r \cdot \Delta F$ besitzt.

Wie verhält es sich mit Druck und Masse, wenn sich das Gebilde, das wir betrachten, im Gleichgewicht befindet?

Dann müssen sich insbesondere die Kräfte, die auf unsere kleine Teilregion wirken, zu Null addieren. Unterhalb und oberhalb unseres Elements herrscht jeweils ein Druck $P(r)$, der vom Abstand r vom Zentrum abhängt. Wenn wir dem Mittelpunkt unserer kleinen Region den Radiuswert r zuordnen, dann herrscht direkt unterhalb unserer Region der Druck $P(r{-}\Delta r/2)$, der unsere Region nach oben drückt, und direkt oberhalb der Druck $P(r - \Delta r/2)$. Ein Druck P, der auf eine Fläche ΔF wirkt, erzeugt eine Kraft $P \cdot \Delta F$.

Zusätzlich wirkt die Gravitationskraft auf unsere Region, und zwar in Richtung Zentrum. Dabei wirkt die im Bereich kleiner als r versammelte Masse $M(r)$ so, als wäre sie eine im Kugelmittelpunkt konzentrierte Punktmasse. Unsere kleine Region besitzt ihrerseits eine Masse $m = \rho(r)\Delta V = \rho(r)\,\Delta F\,\Delta r$, wobei $\rho(r)$ die Dichte der Materie im Abstand r vom Kugelmittelpunkt ist.

Insgesamt ergibt sich daraus gemäß der Newtonschen Formel für das Gravitationsgesetz die Kraft mit dem Betrag

$$F_g = G\frac{M(r)\rho(r)\Delta F\,\Delta r}{r^2}. \tag{12}$$

Auch diese Kraft wirkt zum Kugelmittelpunkt hin.

Insgesamt summieren sich Gravitationskraft und Druckkräfte zu

$$\frac{GM(r)}{r^2}\cdot\rho(r)\,\Delta r\,\Delta F \quad + \quad P(r+\Delta r/2)\cdot\Delta F \quad - \quad P(r-\Delta r/2)\cdot\Delta F = 0 \overset{!}{=} 0 \tag{13}$$

Diese Bedingung kann man wie folgt umschreiben. Die Kombination

$$\frac{P(r+\Delta r/2) - P(r-\Delta r/2)}{\Delta r}$$

entspricht im Grenzfall Δr gerade die Ableitung von $P(r)$ nach dem Radius r, also

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}.$$

Damit wird (13) zu

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}. \tag{14}$$

Das ist eine der Grundgleichungen für den Aufbau astronomischer Objekte.

6 Vereinfachtes Druckgleichgewicht

Die Gleichung (14) ist eine Differenzialgleichung, in der drei verschiedene Funktionen vorkommen: $M(r)$ und $\rho(r)$ auf der rechten Seite, $P(r)$ in Form seiner Ableitung auf der linken. Um eine Lösung zu finden, benötigt man im allgemeinen noch weitere Gleichungen für diese Größen.

Wir treffen folgende vereinfachende Annahme: Die Dichte unseres Körpers möge konstant sein, $\rho = const.$. Das ist für Festkörper bis zu einer gewissen Größe sicher eine gute Näherung, und auch für größere Körper sollte dieses vereinfachte Modell zumindest eine sinnvolle Abschätzung ermöglichen.

Bei konstanter Dichte ist die Gesamtmasse einer Kugel mit Radius r, also unsere Funktion $M(r)$, gerade gegeben durch

$$M(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{15}$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung (14):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r. \tag{16}$$

Das ist eine Gleichung für die Ableitung von $P(r)$, die nur noch von r und von Konstanten abhängt. Solch eine Ableitung kann man direkt integrieren und erhält

$$P(r) = -\frac{2}{3}\pi G\rho^2 r^2 + C \tag{17}$$

mit einer Integrationskonstante C. Den Wert der Integrationskonstante kann man wie folgt bestimmen: Außerhalb des Objekts gibt es keine Materie, und damit auch nichts, was einen Druck ausüben könnte. Wir nehmen an, dass der Verlauf der Funktion $P)r=$stetig ist, dass $P(r)$ also keine Sprünge macht. Damit muss direkt an der Oberfläche unseres (kugelförmigen) Körpers, beim Radius R des Körpers, gelten, dass $P(R) = 0$. Setzt man in (17) $r = R$ und fordert $P(R) = 0$, dann erhält man die Gleichung

$$C = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2.$$

Eingesetzt in unsere Druckgleichung (17) ergibt das

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 (R^2 - r^2). \tag{18}$$

Man kann diese Gleichung auch umschreiben, indem man die konstante Dichte ρ durch die Gesamtmasse

$$M \equiv \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{19}$$

ausdrückt, und erhält

$$P(r) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{20}$$

Am höchsten ist der Druck damit, nicht überraschend, im Zentrum. Dort beträgt er

$$P(0) = \frac{3}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}. \tag{21}$$

7 Festkörper im Gravitations-Druckgleichgewicht

Für einen kugelförmigen Festkörper unter seiner eigenen Schwerkraft wird der Gegendruck durch den Entartungsdruck (11) erzeugt: Der Festkörper widersetzt sich weiterer Kompression, welche die Orbitale der Elektronen seiner Atome ineinanderdrücken würde.

Stabil ist der Festkörper, solange der Zentraldruck kleiner ist als der Entartungsdruck

$$P_E = \frac{3^{2/3}}{20\,\pi^{4/3}} \cdot \frac{h^2}{m_e}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

Jetzt müssen wir allerdings noch beide Drücke so umschreiben, dass sie von denselben Größen abhängen. Das Gesamtvolumen ist in unserem Falle

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Die Anzahl der Elektronen N können wir wie folgt durch die Masse ausdrücken. Wir nehmen an, dass unser Festkörper insgesamt elektrisch neutral ist, sprich: dass es genau soviele Elektronen wie Protonen gibt. Elektronen besitzen soviel weniger Masse als Protonen, dass wir die Elektronen zur Berechnung der Gesamtmasse M vernachlässigen können. Allerdings sind da auch noch die Neutronen, die näherungsweise dieselbe Masse haben wie die Protonen, nämlich pro Nukleon (pro Proton oder Neutron) $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg. Angenommen, auf jedes Proton kämen im Durchschnitt $(\mu - 1)$ Neutronen. Dann hat jedes Proton zusammen mit den im Durchschnitt zugehörigen Neutronen die Masse μm_p.

Gibt es insgesamt N Elektronen, dann gibt es insgesamt auch N Protonen, und die Gesamtmasse des Objekts sind

$$M = N\mu\, m_p,$$

bzw. nach N aufgelöst gilt

$$N = \frac{M}{\mu\, m_p}.$$

Eingesetzt erhält man für R den Wert

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{(3/2)^{4/3}}{10\pi^2}\frac{h^2}{Gm_e(\mu\, m_p)^{5/3}M^{1/3}} \\
&= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/3}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3}\ 1300\,\text{km} = \left(\frac{M}{M_\oplus}\right)^{-1/3}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/3}\cdot 10^5\ \text{km} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

(wobei die numerischen Vorfaktoren wie bei jeder unserer vereinfachten Rechnungen nicht zu ernst genommen werden sollten).

8 Erdähnliche (terrestrische) Planeten

Wir können diese Gleichung auch so umschreiben, dass die mittlere Dichte anstatt der Masse eingeht, gemäß (19). Dann erhalten wir für den Radius

$$
R = \sqrt{\frac{3^{5/3}}{40\pi^{4/3}}}\cdot\frac{h}{\sqrt{Gm_e(\mu\, m_p)^{5/3}\rho^{1/3}}} = 32\,000\ \text{km}\left(\frac{\rho}{1000\,\text{kg/m}^3}\right)^{-1/6}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{-5/6}. \qquad (23)
$$

Die mittlere Dichte der Erde liegt bei 5500 kg/m^3, und für ihre häufigsten chemischen Elemente (Mg, Si, O, Fe) ist in guter Näherung $\mu = 2$. Eingesetzt erhalten wir als oberen Radius für Planeten mit derselben Dichte wie die Erde

$$
R_{max} = 25\,000\,\text{km} \sim 4\,R_\oplus \qquad (24)
$$

Für unsere Erde bestünde demnach noch Luft nach oben – sie könnte bei derselben Dichte noch größer sein. Die Größe eines Sterns wie der Sonne, deren Radius rund 110 Erdradien besteht, ließe sich auf diese Weise allerdings nicht erreichen.

9 Druck und Temperatur in der Atmosphäre

Das Bild von Gravitation und Gegendruck können wir uns auch für die Erdatmosphäre anschauen. Dabei sind einige Vereinfachungen möglich. Eine Atmosphäre hat ja gerade keine scharfe Grenze, aber wenn man sich anschaut, bis zu welcher Höhe der überwiegende Teil der Materie sich findet, dann gilt: Im Vergleich zum Erdradius ist die Atmosphäre sehr dünn. Die Mesopause, ungefähr dort wo den üblichen Definitionen nach der Weltraum beginnt, befindet sich 80 bis 100 km über dem Erdboden. 100 km entsprechen nur 1.6% des Erdradius. Auf einem Globus mit 40 Zentimetern Durchmesser wäre die Atmosphäre nur 3 Millimeter dick. 99% der Gesamtmasse der Erdatmosphäre sind innerhalb einer Höhe von rund 16 km über dem Erdboden konzentriert, das wäre dann sogar nur ein halber Millimeter.

Damit müssen wir uns um die Krümmung der Atmosphärenschichten keine großen Sorgen machen, sondern können die Atmosphärenschichten näherungsweise als flach ansehen, im rechten Winkel zur Radialrichtung. Die Höhenabhängigkeit der Atmosphäreneigenschaften drücken wir aus als Funktion der Höhe z über dem Erdboden.

Die zweite Vereinfachung betrifft die Stärke der Gravitationsbeschleunigung. Die Newtonsche Formel für die Gravitationsbeschleunigung im Abstand r vom Mittelpunkt der Masse M lautet

$$g = \frac{GM}{r^2}. \tag{25}$$

Setzen wir den mittleren Radiuswert ein, beträgt die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche, also beim Erdradius $r = R_\oplus$,

$$g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 9.80\ \mathrm{m/s}^2. \tag{26}$$

16 Kilometer höher sind es

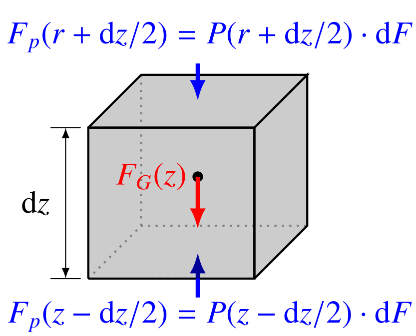
$$g = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + 16\ \mathrm{km})^2} = 9.75\ \mathrm{m/s}^2, \tag{27}$$

entsprechend einer Abweichung von einem halben Prozent, und in hundert Kilometer Höhe über dem Erdboden

$$g = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + 100\ \mathrm{km})^2} = 9.50\ \mathrm{m/s}^2, \tag{28}$$

entsprechend einer Abweichung von 3% vom Oberflächenwert. In guter Näherung können wir die Gravitationsbeschleunigung also insbesondere bis dorthin, wo sich die bei weitem meiste Luftmasse der Atmosphäre befindet, als konstant annehmen und den Oberflächenwert benutzen.

Mit diesen Vereinfachungen kommen wir noch einmal zurück zum Gleichgewicht von Gravitationskraft und Druck. Für einen kleinen Atmosphärenbereich. Hier ist noch einmal die entsprechende Grafik, jetzt mit der Höhe–über–dem–Erdboden z anstatt des Radius r, mit infinitesimaler Fläche dF und infinitesimaler Ausdehnung dz:



Nennen wir die Druckdifferenz zwischen oberer und unterer Fläche dP, dann ist die Nettokraft aufgrund der Druckdifferenz auf unser kleines Volumenelement d$P\cdot$dF. Die Gravitationskraft ist nach unten gerichtet und hat aufgrund der von uns angenommenen konstanten Gravitationsbeschleunigung die Stärke $g \cdot \mathrm{d}m$, wobei die Masse $\mathrm{d}m$ unseres kleinen Volumenelements durch die Dichte ρ ausgedrückt werden kann,

$$\mathrm{d}m = \rho \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}z. \tag{29}$$

Auf diese kleine Masse wirkt die Gravitationskraft $-\mathrm{d}m \cdot g$, wobei das Minuszeichen anzeigt, dass die Kraft in negative z-Richtung wirkt. Jener Gravitationskraft entgegen wirkt die mit der Druckdifferenz $\mathrm{d}P$ assoziierte Kraft $\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}A$, denn Druck ist ja gerade Kraftwirkung pro Flächeneinheit. Im Gleichgewicht halten sich jene beiden Kräfte für ein Gaspaket gerade die Waage, nämlich

$$-\mathrm{d}m \cdot g = -\rho \cdot \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}z \cdot g = \mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}A. \tag{30}$$

Die beiden rechten Ausdrücke enthalten jeweils einen Faktor $\mathrm{d}A$, den wir wegkürzen können. Übrig bleibt dann

$$-\rho \mathrm{d}z g = \mathrm{d}P \tag{31}$$

oder umgeschrieben

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho \cdot g. \tag{32}$$

Das ist eine einfache Differentialgleichung für den Druck P in Abhängigkeit von der Höhe z und der Dichte ρ. Den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte liefert uns die Zustandsgleichung des betreffenden Gases. Gehen wir vereinfacht von einem Gas mit nur einer Molekülsorte aus, dann lautet sie

$$PV = N\, k_B\, T \quad P = \frac{Nm}{V}\frac{k_B T}{m} = \rho \frac{k_B T}{m}, \tag{33}$$

wobei N die Anzahl der Moleküle ist, k_B die universelle Gaskonstante, m die Masse eines Moleküls unseres Gases und T die Temperatur. Nutzen wir den rechten Ausdruck, um in (32) ρ durch P zu ersetzen, dann erhalten wir die neue Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{gm}{k_B T} \cdot P. \tag{34}$$

Wäre T von der Höhe z unabhängig, dann könnte man diese Gleichung leicht mit dem Verfahren der Trennung der Variablen integrieren. Dazu bringen wir alle Terme mit P auf die eine Seite, alle Terme mit z auf die andere;

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{gm}{k_B T}\mathrm{d}z \tag{35}$$

und integrieren, von der Höhe Null über dem Erdboden (wo der Atmosphärendruck P_0 herrschen möge) bis zur Höhe z' wo der Druck P' herrschen möge. Dann haben wir

$$\int_{P_0}^{P'} \frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{gm}{k_B T} \int_0^{z'} \mathrm{d}z. \tag{36}$$

Die beiden Integrale sind recht einfach. Das Integral von $1/x$ ist der natürliche Logarithmus $\ln(x)$. Aufintegriert steht dort also

$$\ln(P') - \ln(P_0) = -\frac{gm}{k_B T}\, z'. \tag{37}$$

Die Differenz von Logarithmen ist der Logarithmus des Quotienten, also in diesem Falle $\ln(P') - \ln(P_0) = \ln(P'/P_0)$, und wenn wir nach diesem Umschreiben auf beide Seiten die Exponentialfunktion anwenden, steht dort

$$\frac{P'}{P_0} = \exp\left[-\frac{gm}{k_B T}\, z'\right]. \tag{38}$$

Die gestrichenen Größen P' und z' ersetzen wir jetzt wieder durch P und z, schlicht weil das ein wenig einfacher ist, und bringen das P_0 auf die rechte Seite. Das Ergebnis ist die sogenannte *barometrische Höhenformel*

$$P(z) = P_0 \cdot \exp\left[-\frac{gm}{k_B T}\, z\right]. \tag{39}$$

In Worten: In solch einer Atmosphäre mit gleichbleibender Temperatur fällt der Druck exponentiell ab. Der Ausdruck $k_B T/mg$ hat die Einheit einer Länge und wird als *Skalenhöhe H* bezeichnet. Die Höhenformel wird dann noch einfacher,

$$P(z) = P_0 \cdot \exp\left[-\frac{z}{H}\right]. \tag{40}$$

In der wirklichen Atmosphäre nimmt die Temperatur allerdings mit steigender Höhe z ab.

Im Allgemeinen ist die Temperatur allerdings sehr wohl von der Höhe z abhängig, also $T(z)$. Dann müssen wir die rechte Seite von (35) direkt integrieren, und es steht dort

$$-\frac{gm}{k_B}\int_0^{z'} \frac{\mathrm{d}z}{T(z)}. \tag{41}$$

Es ist dabei praktisch, diesen Ausdruck in eine etwas andere Form zu bringen. Um Mittelwerte zu berechnen, sagen wir: von N Zahlen x_1, x_2 bis x_N gibt es nicht nur das arithmetische Mittel

$$\bar{x}_A \equiv \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}, \tag{42}$$

sondern auch das sogenannte harmonische Mittel,

$$\bar{x}_H \equiv \frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_N}}. \tag{43}$$

Das ist insbesondere dort, wo über Wachstumsraten gemittelt werden soll, ein sinnvoller Ausdruck, und eine (relative) veränderliche Wachstumsrate stellt $1/T$ in der

Gleichung (34) ja auch dar. Mit Hilfe des Integrals bilden wir so etwas wie einen kontinuierlichen Mittelwert. Anstatt diskrete Kehrwerte $1/T_1$, $1/T_2$ etc. aufzusummieren, integrieren wir über $\mathrm{d}z/T(z)$. Anstatt mit n malzunehmen müssen wir mit der Länge des Integrationsintervall, bei uns z', malnehmen. Insgesamt ist das harmonische Mittel von T von der Höhe 0 bis zur Höhe z' dann

$$\bar{T}_H(z') = \frac{z'}{\int\limits_0^{z'} \frac{\mathrm{d}z}{T(z)}} \tag{44}$$

und das Integral (41) demnach

$$-\frac{gm}{k_B \bar{T}_H(z')}\, z'. \tag{45}$$

Das ist von der Form her derselbe Ausdruck wie (37), nur dass dort statt der konstanten Temperatur T jetzt das harmonische Mittel $\bar{T}_H(z')$ der Temperatur vom Boden bis zur Höhe z' steht. Setzen wir das Ergebnis wie damals im vereinfachten Fall (37) mit dem P-Integral gleich und unternehmen dieselben Vereinfachungsschritte (Logarithmus-Differenz umschreiben, Exponentialfunktion ausführen, gestrichene Größen z' und P' durch z bzw. P ersetzen), dann erhalten wir die Höhenformel mit Temperaturprofil:

$$P(z) = P_0 \cdot \exp\left[-\frac{gm}{k_B \bar{T}_H(z)}\, z\right]. \tag{46}$$

Das ist unsere grundlegende Strukturformel für Planetenatmosphären, konkreter: für den Druckverlauf in Abhängigkeit vom Temperaturverlauf.