Stabilität und Struktur (Planeten, Atmosphären)

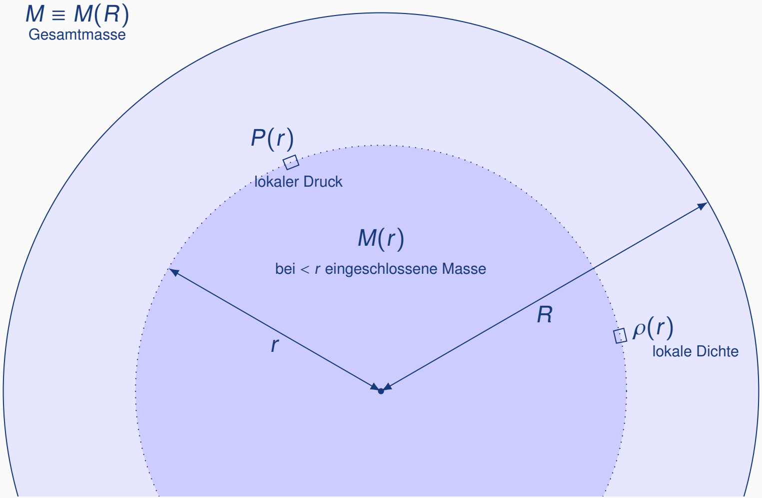
Das Sonnensystem und seine nächsten Verwandten für Nicht-Physiker

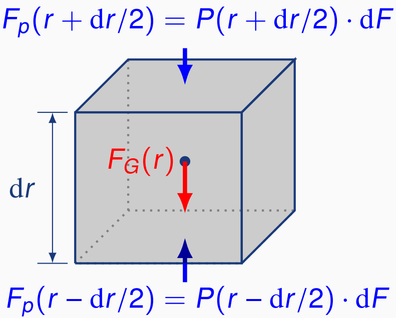
Markus Pössel

Haus der Astronomie

Universität Heidelberg, WS 2022/2023

- Stabilität: die Grundlagen
- Planeten:
  - Wie groß können sie werden?
  - Ab welcher Größe sind sie rund?
- Planetenatmosphären:
  - Unter welchen Bedingungen hält ein Planet eine Atmosphäre?
  - Welches ist der Druckverlauf in einer Planetenatmosphäre?


$M \equiv M(R)$
Gesamtmasse
$P(r)$
lokaler Druck
$M(r)$
bei $< r$ eingeschlossene Masse
R
r
$\rho(r)$
lokale Dichte



Wenn sich die Materie im Würfel weder nach oben noch nach unten bewegen soll:

$$F_p(r - \mathrm{d}r/2) = F_p(r + \mathrm{d}r/2) + F_G(r)$$

umformuliert zu

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

Im Vorbereitungsvideo:

- Gleichgewicht zwischen Gravitationswirkung und Gegendruck
- Quanteneigenschaften führen zu Gegendruck
- Quanten-Gegendruck führt zu Gleichung
  für maximalen Radius
  als Funktion der (mittleren) Dichte

Details und Rechnungen im Handout

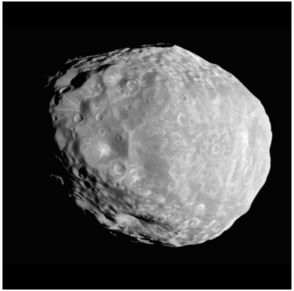
Erdähnliche (terrestrische) Planeten

$$R = 32\,000\ \text{km} \left(\frac{\rho}{1000\ \text{kg/m}^3} \right)^{-1/6}$$

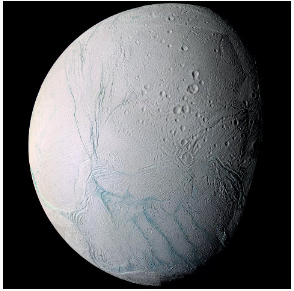
konkret für den Dichtewert
für die Erde, $\rho = 5500\ \text{kg/m}^3$,

$$R_{max} = 25\,000\ \text{km} \sim 4\ R_{\oplus}$$

Bild: NASA/ GSFC/ NOAA/ USGS



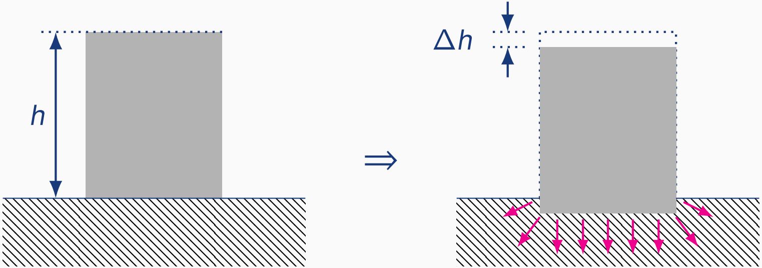
Saturnmond Janus, $R = 90\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute



Saturnmond Enceladus, $R = 250\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute

IAU-Definition “Planet”:

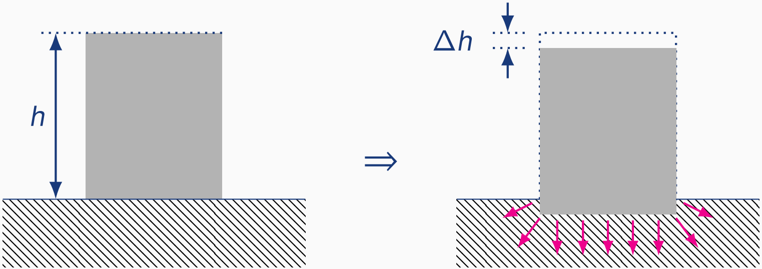
- läuft um die Sonne um,
- genügend Masse für hydrostatisches Gleichgewicht (näherungsweise runde Form)
- hat die Nachbarschaft seiner Umlaufbahn “freigeräumt”



Wenn Berg der Höhe h und Grundfläche F um Δh in den Boden versinkt:

Potentielle Energiedifferenz $\Delta E_{pot} = \Delta m \cdot g \cdot h = (\rho\, F\, \Delta h) \cdot g \cdot h$

mit $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ der Schwerebeschleunigung auf der Erdoberfläche.

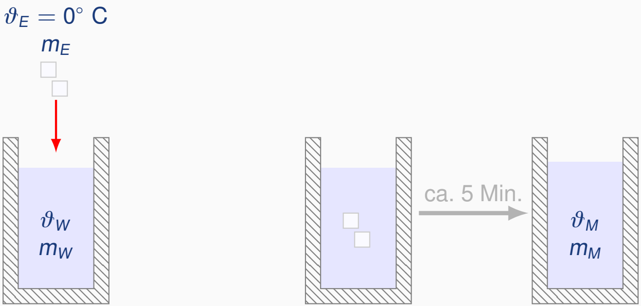


Energie nötig, um an der Basis Volumen von $F \cdot \Delta h$ zu verflüssigen, um es aus dem Weg zu räumen: Schmelzwärme (Schmelzenthalpie)

$$\Delta E_{form} = H_{schm} \cdot \Delta m$$

mit H_{schm} der spezifischen Schmelzenthalpie
(= für’s Schmelzen benötigte Energie pro Masseneinheit)

Modellfestkörper: Eis (vor dem Einwerfen liegen lassen und abtrocknen)



Auf dem Weg zum Wärmegleichgewicht:
Wasser gibt Energie an Eiswürfel ab, bei spezifischer Wärmekapazität c_W:

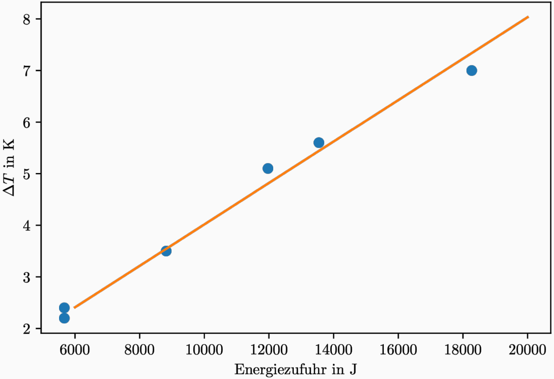
$$c_W \cdot m_W(\vartheta_W - \vartheta_M) = H_{schm,Eis} \cdot m_E + c_W \cdot m_E(\vartheta_M - 0°\text{C})$$

Spezifische Schmelzenthalpie bestimmen

$m_W = 475$ g, $m_E = 22$ g, $\vartheta_W = 23.4°$C, $\vartheta_M = 19.5°$C

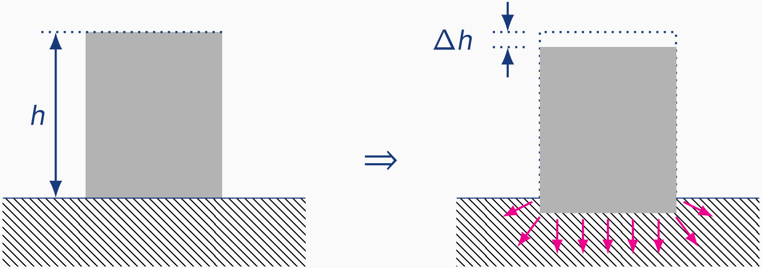
$$\Rightarrow H_{schm,Eis}/c_W = \frac{m_W}{m_E}(\vartheta_W - \vartheta_M) - \vartheta_M = 64.7 \text{ K}$$

Spezifische Wärmekapazität bestimmen



$c_W = 4470$ J/(kg K) $\Rightarrow$ $H_{schm,Eis} = 290$ kJ/kg (Literaturwert: 334 kJ/kg)

Energetik einsackender Berge



Einsack-Bedingung $\Delta E_{pot} \geq \Delta E_{form}$:

$$\Delta m\, gh \geq H_{schm} \cdot \Delta m \qquad \Rightarrow \qquad h \geq H_{schm}/g \approx 30 \text{ km} \text{ für Eis}$$

Granit, Basalt: $H_{schm} \sim 400$ kJ/kg $\Rightarrow \quad h \geq 40$ km

Tatsächliche höchste Berge auf der Erde ~ 10 km

Wie ist es auf anderen Planeten?

Verallgemeinerung auf andere kugelförmige Körper:
Masse M, Radius $R \Rightarrow$ Gravitationsbeschleunigung g an der Oberfläche

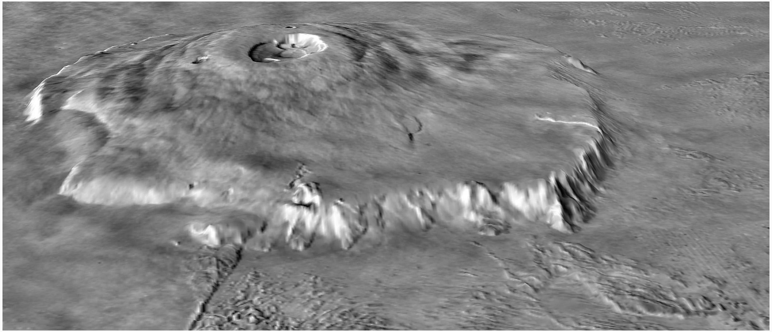
$$g \equiv \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi\rho G R = g_\oplus \left(\frac{\rho}{\rho_\oplus}\right)\left(\frac{R}{R_\oplus}\right)$$

mit $\rho_\oplus$, $R_\oplus$ dem Dichte- bzw. Radiuswert für die Erde.

$$\Rightarrow h_{max} = \left(\frac{\rho_\oplus}{\rho}\right)\left(\frac{R_\oplus}{R}\right) \cdot 30\ \text{km}.$$

$$\rho_{Mars} = 0.71\,\rho_\oplus, R_{Mars} = 0.53\,R_\oplus \quad \Rightarrow \quad h_{max,Mars} = 80\text{ km}.$$

vgl. höchsten Berg auf dem Mars: Olympus Mons, Höhe 22 km



3D-Rekonstruktion Mars Global Surveyor und Viking-Aufnahme. Bild: NASA/MOLA Science Team

Höhe von Bergen: Venus

$$\rho_{Venus} = 0.95\,\rho_\oplus, R_{Venus} = 0.95\,R_\oplus \quad \Rightarrow \quad h_{max,Venus} = 33\text{ km}$$

vgl. höchste Bergkette auf Venus: Maxwell Montes, Höhe 11 km

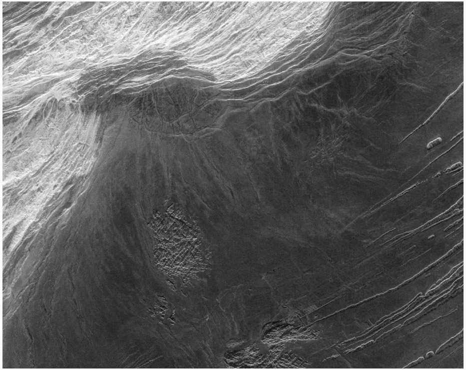


Bild: NASA/JPL, Magellan-Radarbild

$$\rho_{Merkur} = 0.99\ \rho_\oplus,\ R_{Merkur} = 0.38\ R_\oplus \quad \Rightarrow \quad h_{max,Merkur} = 80\ \text{km}$$

aber höchster Merkur-Berg, Caloris Montes, nur ca. 3 km hoch
(Obergrenze, nicht Zielvorgabe! Entstehungsgeschichte wichtig.)

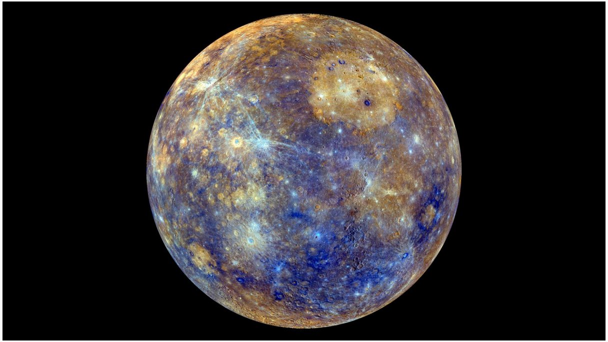
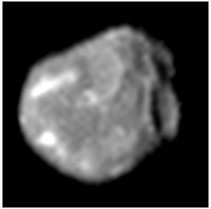


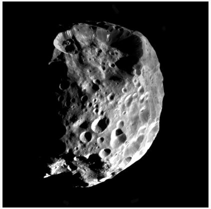
Bild: NASA / JHU Applied Physics Lab / Carnegie Inst. Washington (Messenger)

Ab wann können „Berge“ so hoch werden wie das astronomische Objekt groß ist?

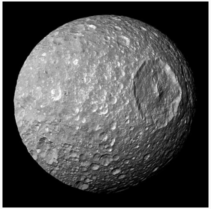
$$h_{max} = \left(\frac{\rho_\oplus}{\rho}\right)\left(\frac{R_\oplus}{R}\right) \cdot 30\text{ km im Grenzfall } h_{max} = R: \quad R = \sqrt{\frac{\rho_\oplus}{\rho}} \cdot 440\text{ km}$$

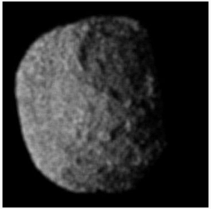

Jupitermond Amalthea,
$R = 84\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Cornell University

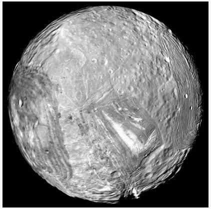

Saturnmond Janus,
$R = 90\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute

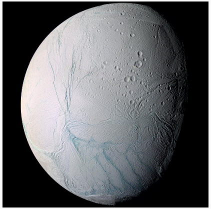

Saturnmond Phoebe,
$R = 120\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute


Saturnmond Hyperion,
$R = 133\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute


Saturnmond Mimas,
$R = 200\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute


Neptunmond Proteus,
$R = 210\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL


Uranusmond Miranda,
$R = 236\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL-Caltech


Saturnm. Enceladus,
$R = 250\,\mathrm{km}$
Bild: NASA/JPL/Space Science Institute

Gas schwieriger als Festkörper — Druckprofil stellt sich ein.

Bild: ISS013-E-54329, Earth Science and Remote Sensing Unit, NASA Johnson Space Center

Bild: Jupiter und Io, aufgenommen von der Cassini-Mission. NASA/JPL/University of Arizona

Beachtliche Variationsbreite: Erdatmosphäre zu Erdradius 1:1000
Jupiter„atmosphäre“ zu Jupiterradius ca. 1:2 (Wahl et al. 2017, Juno-Mission)

Wann ist eine Atmosphäre “stabil”? Fluchtgeschwindigkeiten

(Endliche) Temperatur heißt rasches Durcheinanderbewegen von Atomen/Molekülen, charakteristische thermische Geschwindigkeit v_{th}

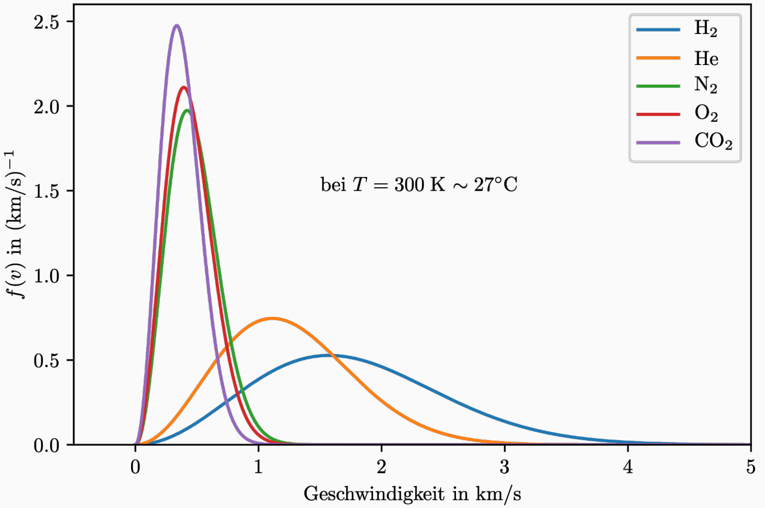
Energieerhaltung für Körper der Masse m im Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen Masse M, Abstand r vom Zentrum, Geschwindigkeit v:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r} = const.$$

Folgt Definition Fluchtgeschwindigkeit: Geschwindigkeit, um von Körperoberfläche bei R ins Unendliche zu gelangen:

$$v_{Fl} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Planeten können Atmosphäre nur halten, wenn $v_{Fl} > v_{th}$



$$v_{th} = \bar{v} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

mit:
k_B Boltzmann-Konstante,
m Teilchenmasse,
T Temperatur in Kelvin

Definiere Jeans-Parameter als Funktion der Höhe z über der Oberfläche:

$$\lambda(z) = \frac{2GMm}{(R+z)k_B T} = 3\left(\frac{v_{Fl}}{v_{th}}\right)^2$$

Jeans-Parameterwerte (aus Raten-Betrachtungen):

- $\lambda > 30$: fest gravitativ gebunden
- $\lambda < 5$: hydrodynamisches Abströmen
- $\lambda < 1.5$: “blow-off”

. . . jeweils auf Höhe z der *Exosphäre* (wo zu wenige Kollisionen stattfinden, um ein Teilchen, das nach draußen strebt, aufzuhalten)

Zum Vergleich: definiere

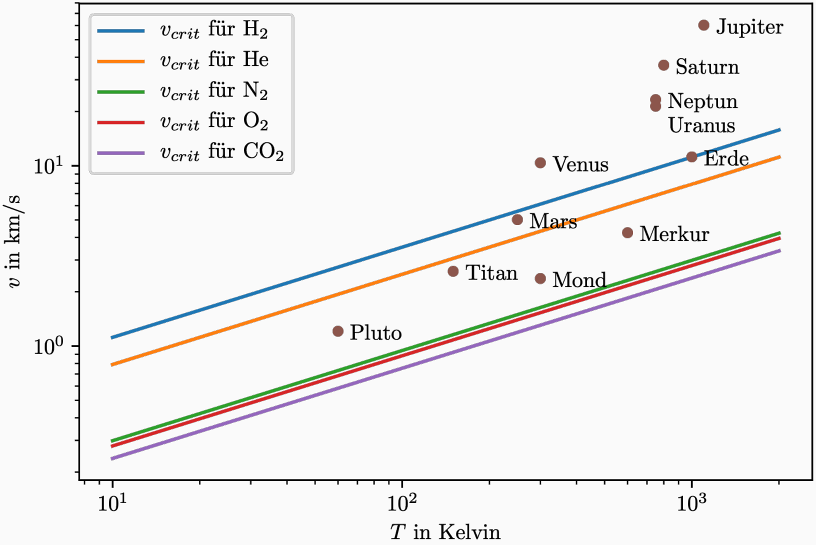
$$v_{crit}(T, m) = 3 \cdot v_{th}(T, m) = 5.5 \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

so dass Atmosphäre stabil ist bei

$$v_{crit} < v_{Fl}.$$

Trage auf: $v_{crit}(T)$ für verschiedene Atom- bzw. Molekülsorten und T_{exo}, v_{Fl} (Exosphären-Temperaturen und Fluchtgeschwindigkeiten) für Planeten/Monde

Stabile Atmosphären aus Planeten-Fluchtgeschwindigkeiten



Grundgleichung $$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Gravitationsbeschleunigung g an der Oberfläche:

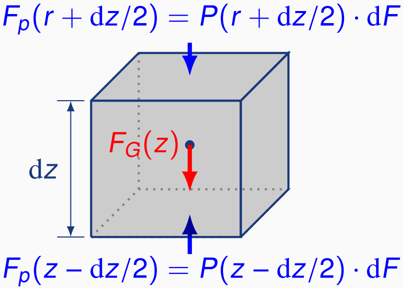
$$g \equiv \frac{GM}{R^2}$$

und Gas erfüllt ideale Gasgleichung

$$PV = Nk_B T \quad \Rightarrow \quad P = \frac{Nm}{V}\frac{k_B T}{m} = \rho\frac{k_B T}{m}$$

dann gilt für Höhe z über der Oberfläche:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{gm}{k_B T} \cdot P$$



$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{gm}{k_B T} \cdot P$$

definiere Skalenhöhe

$$H \equiv \frac{k_B T}{mg}.$$

Dann folgt

$$P(z) = P_0 \cdot \exp(-z/H),$$

wobei P_0 der Druck an der Oberfläche ist. Mit $m = \mu m_p$,

$$H = 7\,\mathrm{km} \cdot \left(\frac{T}{250\,\mathrm{K}}\right)\left(\frac{\mu}{28.96}\right)^{-1}$$

Dieser einfachen Formel nach, man bedenke $P \sim \rho$:
Erdatmosphäre reicht bis $z \sim n \cdot H$, Größenordnung 10...100 km

Wir haben (näherungsweise) physikalisch abgeleitet:

- Warum erdähnliche Planeten nicht größer als ca. 4 $R_\oplus$ sind
- Wie hoch Berge auf erdähnlichen Planeten höchstens werden können
- Warum Planeten ab Größenordnung $R \sim 100$ km rund sind
- Warum Riesenplaneten reichlich Wasserstoff/Helium in der Atmosphäre haben können, kleinere Planeten nicht
- Ausdehnung der Erdatmosphäre von Größenordnung $10 \ldots 100$ km

Ausblick

Weiter geht es mit konkreteren Beispielen:

- Sonne und andere Sterne (5. Dezember, MP)
- Erdähnliche Planeten (12. Dezember, MP)
- Gasriesen und Eisriesen (19. Dezember, HK)