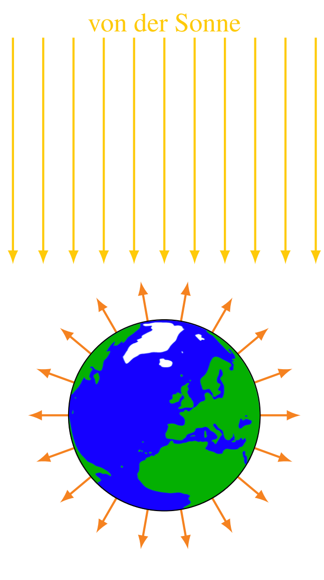
Grundlegende Rechnungen zu Strahlungsgleichgewicht und Treibhauseffekt

Markus Pössel

Handout zur Vorlesung „Das Sonnensystem und seine entfernten Verwandten für Nichtphysiker“ am 12.12.2022

1 Einfache Strahlungsbilanz

Die Ausgangssituation, hier zweidimensional skizziert, ist die folgende: Thermische Sonnenstrahlung, nämlich Wärmestrahlung mit Effektivtemperatur $T_{\mathrm{eff},\odot}$, trifft auf einen Planeten; der Planet, hier als Kugel genähert, erwärmt sich und strahlt seinerseits Wärmestrahlung mit einer ihm eigenen Effektivtemperatur $T_{\mathrm{eff},P}$ ab:



Nach einer Weile wird sich näherungsweise ein Strahlungsgleichgewicht einstellen, in dem der Planet pro Zeiteinheit genau so viel Energie in Form von Strahlung abgibt wie er von der Sonne an Energie zugeführt bekommt. Denn vereinfacht gesagt: Würde der Planet nämlich weniger Energie von der Sonne zugeführt bekommen als er im gleichen Zeitraum abgibt, würde er auskühlen, seine Effektivtemperatur würde sinken, und seine eigene Strahlungsleistung würde entsprechend auch sinken. Im umgekehrten Falle, wenn der Planet mehr Energie zugeführt bekommt als er abgibt, würden seine Effektivtemperatur und seine Strahlungsleistung ansteigen. Ein selbstregelndes System, das sich zu demjenigen Zustand hinentwickelt, in dem die Strahlungsbilanz ausgeglichen ist, der Planet also genau so viel Strahlung erhält wie abgibt.

Für dieses Strahlungsgleichgewicht können wir den Zusammenhang zwischen den beiden Effektivtemperaturen $T_{\text{eff},\odot}$ und $T_{\text{eff},P}$ wie folgt ausrechnen. Ich rede dabei im Folgenden von der Erde, aber die Überlegungen lassen sich auf andere Planeten direkt übertragen. Der Zusammenhang von Gesamt-Strahlungsleistung (in der Astronomie Leuchtkraft genannt) L und Effektivtemperatur ist durch die Stefan-Boltzmann-Formel gegeben, hier für die Sonne

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \cdot \sigma_{SB} T_{\text{eff},\odot}^4. \tag{1}$$

Die Intensität der Sonnenstrahlung, also die Energie pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit (genauer: pro Einheit der Auffang-Fläche senkrecht zur einfallenden Strahlung) am Ort des Planeten, der sich im Abstand a_P von der Sonne befinden möge, ist dann

$$I_P = \frac{L_\odot}{4\pi a_P^2} = \sigma_{SB} T_{\text{eff},\odot}^4 \cdot \left(\frac{R_\odot}{a_P}\right)^2. \tag{2}$$

Nun könnte man sich Gedanken machen über die verschiedenen Teile der Erdkugel, die ja im unterschiedlichen Winkel zur einfallenden Strahlung stehen, und deren Beiträge dann aufsummieren; das führt zum richtigen Ergebnis, es geht aber viel einfacher: Von der Erde wird jene Sonnenstrahlung aufgefangen, die auf eine Fläche mit derselben Querschnittsfläche wie die Erde fällt. Das sieht man nicht zuletzt daran, dass die Erde die Raumregionen direkt hinter sich abschattet, und zwar mit einem Schatten, der näherungsweise so groß ist wie ihre Querschnittsfläche. Die Strahlungsleistung, die bei der Erde ankommt, ist deswegen erst einmal

$$\pi R_P^2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi a_P^2}. \tag{3}$$

Hinzu kommt als Effekt allerdings noch die Albedo A, die angibt, welcher Bruchteil der ankommenden Strahlungsleistung von der Erde bzw. ihrer Atmosphähre reflektiert wird. Daher kommt letztlich nur die Strahlungsleistung

$$L_{in,P} = (1-A)\pi R_P^2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi a_P^2} = \pi R_P^2 (1-A) \sigma_{SB} T_{\text{eff},\odot}^4 \cdot \left(\frac{R_\odot}{a_P}\right)^2 \tag{4}$$

bei der Erde an. Die ausgehende Strahlungsleistung wiederum ist, wenn wir vereinfachend annehmen, dass die gesamte Erdoberfläche die Effektivtemperatur $T_{\text{eff},P}$ und die Abstrahlung gleichmäßig über die gesamte Oberfläche mit Flächeninhalt $4\pi R_P^2$ erfolgt,

$$L_{out,P} = 4\pi R_P^2 \varepsilon \sigma_{SB} T_{\text{eff},P}^4.$$

Dabei ist ε die sogenannte Emissivität. Wir setzen vereinfachend $\varepsilon \sim 1$, und das scheint in diesem Falle auch eine recht gute Näherung zu sein. Strahlungsgleichgewicht bzw. eine ausgeglichene Strahlungsbilanz entsprechen dann

$$L_{out,P} \stackrel{!}{=} L_{in,P}, \tag{5}$$

also insgesamt

$$4\pi R_P^2 \sigma_{SB} T_{\mathrm{eff},P}^4 \stackrel{!}{=} \pi R_P^2 (1-A) \sigma_{SB} T_{\mathrm{eff},\odot}^4 \cdot \left(\frac{R_\odot}{a_P}\right)^2 \tag{6}$$

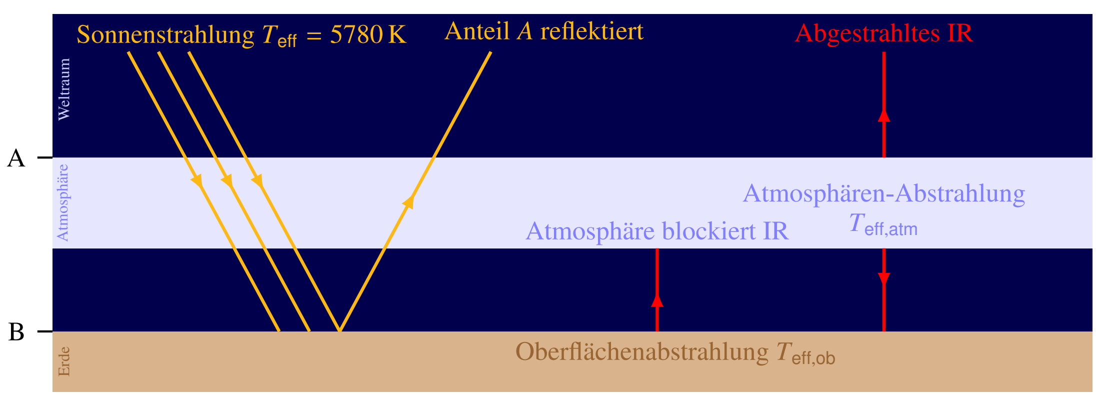
Aufgelöst nach $T_{\mathrm{eff},P}$ erhalten wir

$$\Rightarrow \quad T_{\mathrm{eff},P} = T_{\mathrm{eff},\odot} \frac{(1-A)^{1/4}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R_\odot}{a_P}} = 278\ \mathrm{K}\ (1-A)^{1/4} \sqrt{\frac{1\ \mathrm{AE}}{a_P}}. \tag{7}$$

Auf dieser Formel basiert die Vergleichsgrafik für die Strahlungsgleichgewichts- und tatsächlichen Oberflächentemperaturen. An jener Grafik sieht man allerdings sehr deutlich, dass da noch etwas fehlt.

2 Vereinfachtes Modell für den Treibhauseffekt

Das vermutlich einfachste Modell für den Treibhauseffekt erhalten wir, wenn wir in die Strahlungsbilanz eine Atmosphäre als Trennschicht mit einbeziehen, von der wir annehmen, dass sie die (einfallende und reflektierte) Sonnenstrahlung komplett durchlässt, allerdings die Infrarotstrahlung welche die Erde als thermische Strahlung abstrahlt komplett blockiert. Auch dieser Modell-Atmosphäre kommt natürlich eine Temperatur zu, aufgrund derer sie sowohl nach unten (zur Erdoberfläche hin) als auch nach oben (in den Weltraum) ihrerseits abstrahlt. Hier ist die Situation skizziert:



Betrachten wir jetzt in diesem einfachen Schichtmodell, bei dem wir uns über die Kugelgestalt der Erde erst einmal keine Gedanken machen, wieviel Energie pro Flächeneinheit durch unser System fließt. Wir wollen jeweils die Gleichgewichtssituation betrachten, und zwar einmal just außerhalb der Atmosphärenschicht, auf der eingezeichneten Höhe A, und einmal direkt auf der Erdoberfläche, auf der Höhe B.

Die Intensität der einfallenden Sonneneinstrahlung ist I_P, mit einem reflektierten Anteil $A\, I_P$. Für die weiteren Strahlungsanteile ergibt sich die Intensität direkt aus der Stefan-Boltzmann-Konstante σ_{SB} und der Effektivtemperatur, als $\sigma_{SB}\, T_{\mathrm{eff}}^4$.

Auf Höhe A haben wir damit die Strahlungsbilanz (einfallende Strahlung negativ gezählt, ausgehende Strahlung positiv):

$$-I_P + A\, I_P + \sigma_{SB} T_{\mathrm{eff,atm}}^4 = 0. \tag{8}$$

Insbesondere spielt die thermische Abstrahlung der Erdoberfläche in dieser Bilanz keine Rolle, denn sie ist ja im wesentlichen Infrarotstrahlung, und kommt entsprechend unserer Modellannahme nicht durch die Atmosphäre durch sondern wird dort komplett absorbiert.

Auf Höhe B haben wir die Strahlungsbilanz:

$$-I_P + A\, I_P - \sigma_{SB} T_{\mathrm{eff,atm}}^4 + \sigma_{SB} T_{\mathrm{eff,ob}}^4 = 0. \tag{9}$$

Die von der Atmosphäre nicht beeinflusste Sonneneinstrahlung kommt hier in derselben Form vor wie auf Höhe A: ein einfallender und ein reflektierter Anteil. Die Abstrahlung der Atmosphäre hat jetzt das umgekehrte Vorzeichen, denn es geht ja um die Strahlung, die von der Atmosphäre in Richtung Erdoberfläche läuft, also um einfallende Strahlung. Die Wärmestrahlung der Erdoberfläche selbst ist natürlich ausgehend, mit positivem Vorzeichen.

Wenn wir (8) in (9) einsetzen, können wir direkt $T_{\mathrm{eff,ob}}$ durch $T_{\mathrm{eff,atm}}$ ausdrücken, und zwar gilt

$$T_{\mathrm{eff,ob}}^4 = 2 T_{\mathrm{eff,atm}}^4 \tag{10}$$

also

$$T_{\mathrm{eff,ob}} = 2^{1/4}\, T_{\mathrm{eff,atm}}. \tag{11}$$

Die "Oberflächentemperatur" (*skin temperature*) ergibt sich durch die Strahlungsbilanz mit der Sonneneinstrahlung genau so wie in Abschnitt 1. Der zusätzliche Faktor $2^{1/4} \approx 1.19$, der uns von dort zur Temperatur der Erdoberfläche bringt, ist die Auswirkung des vereinfachten Treibhauseffekts.

Für die Erde überschätzt das einfache Modell den Treibhauseffekt deutlich; wie auf der entsprechenden Folie gezeigt: Die Oberflächentemperatur wäre dann 302 K [29°C] vs. die Atmosphären-Oberflächentemperatur 254 K [−19°C]. Die reale gemittelte Oberflächentemperatur ist 287 K [14°C].

In Wirklichkeit gibt es insbesondere noch weiteren Energieaustausch zwischen Atmosphäre und Erdoberfläche: In der Troposphäre gibt es signifikante Konvektion von "Luftpaketen," es steigt also wärmere Luft auf und kühlere Luft nach unten. Der resultierende Temperaturausgleich verringert den Treibhauseffekt des einfachen Modells. Bei noch genauerer Betrachtung spielt auch noch Wasserdampf (mit entsprechender Verdampfungsenergie) eine Rolle. Dass außerdem die Durchlässigkeit der Atmosphäre in komplexerer Weise wellenlängenabhängig ist, ist ja wiederum auf der entsprechenden Vorlesungsfolie dargestellt.